Ю. Б. РУМЕР

СПИНОРНЫЙ АНАЛИЗ

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИИ
Москва 1936 Ленинград

Т 47-5-4
ТКК № 107

Редакция *Н. Д. Ершовой*. Техн. редактор *Э. М. Бейлиной*.
Корректура *О. Н. Барашковой*. Выпускающий *Я. Я. Вигонт*.

Изд. № 81. Тираж 3 000. Подп. в печ. с матриц 18/XI 1935 г. Формат бумаги 82 × 110. Уч.-авт. лист. $6^1/_2$. Бум. лист. $1^5/_8$. Печатн. зн. в бум. листе 146 000. Заказ № 653. Уполномоченный Главлита № В-29617. Выход в свет июнь 1936 г.

3-я тип. ОНТИ им. Бухарина. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие математической физики повлекло за собой разработку и усовершенствование аппарата векторного и тензорного анализов. Особенное значение эти методы приобрели с появлением специальной, а затем и общей теории относительности. Четырехмерная инвариантная формулировка уравнений Максвелла, данная Минковским, дала наиболее простое и убедительное представление о сущности принципа относительности. Создание общей теории относительности, пожалуй, оказалось бы невозможным, если бы своевременно не был разработан аппарат тензорного исчисления.

Бесчисленные попытки создания единой теории поля тяготения и электричества, попытки, своей бесплодностью дискредитировавшие самую идею в глазах почти всех физиков современности, повели к злоупотреблению методами тензорного анализа. Все более и более ясным становилось, что это «жонглирование индексами» не может служить источником новых познаний о структуре окружающего нас мира и ведет нас к голым, абстрактным спекуляциям, имеющим, возможно, чисто математический интерес, но лишенным физического содержания.

Возникшая около десяти лет тому назад квантовая механика переместила центр интереса физических теорий в области микромеханики. Классические теории поля, понимая под этим электромагнитную теорию Максвелла и теорию тяготения Эйнштейна, оставались замкнутыми в себе теориями, завершенными в своем развитии. Казалось, что методы тензорного анализа ограничены областью классической физики и что им нет места в квантовой физике.

Положение, однако, резко изменилось, когда Дирак нашел свою систему диференциальных уравнений для волнового поля электрона, удовлетворяющую принципу относительности и во многом сходную с системой уравнений Максвелла. В уравнениях Дирака до конца доведено и разрешено открытое волновой механикой сходство в природе света и материи, и с этой точки зрения уравнения Дирака представляют то же самое для материальных лучей, что уравнения Максвелла для света.

И тут впервые обнаружилось существование в природе физических величин, законы трансформации которых при переходе от одной системы отсчета к другой отличны от законов трансформации величин, встречавшихся в классической физике.

Начались бесчисленные и, как мы теперь знаем, заранее обреченные на неудачу попытки описать эти величины при помощи привычных векторов и тензоров. Становилось все более и более ясным, что мы имеем дело с величинами sui generis, не сводимыми к тензорным величинам.

В начале 1929 г. покойный П. С. Эренфест, умевший как никто другой остро ставить назревшие вопросы, обращается с письмом к Б. Л. Ван-дер-Вардену, в котором пишет:

«Если мы назовем те новые величины, которые обнаружились в уравнениях Дирака, спинорами, то нельзя ли построить по образцу векторного и тензорного анализов спинорный анализ, который смог бы изучить каждый физик, работающий в этой области».

Ответом на письмо П. С. Эренфеста явилась небольшая работа Ван-дер-Вардена [1]), принципиально разрешавшая поставленную проблему.

Как в свое время Минковский переписал систему уравнений Максвелла в тензорной форме, так что их инвариантность при преобразованиях Лоренца становилась очевидной, так Ван-дер-Варден переписал уравнения Дирака в соответствующей спинорной форме.

После работы Ван-дер-Вардена казалось, что спиноры характеризуют волновое поле материи, а векторы — волновое поле света, что спиноры содержат в себе «квантовое начало» и потому естественно не могут обнаружиться в классических теориях, пренебрегающих квантовыми элементами.

Поэтому большое значение имеет работа О. Лапорта и Г. Юленбека [2]) появившаяся в начале 1931 г. В этой работе было показано, что наряду с тензорной формой уравнений Максвелла, данной Минковским, существует спинорная форма, в которой их инвариантность при преобразованиях Лоренца столь же очевидна.

Мы видим таким образом, что тензоры и векторы классической физики не являются величинами sui generis, а сводимы к величинам спинорного типа. Оказалось, что математический аппарат классической физики имел дело с производными величинами и упустил целый класс величин, характеризуемых в настоящее время спинорами. Оказалось, что спинорный анализ является первичным аппаратом, включающим в себя аппарат тензорного анализа.

---

[1]) B. L. van der Waerden, «Göttinger Nachrichten», 1929, стр. 100.

[2]) G. E. Uhlenbeck u. O. Laporte, «Phys. Rev.», Bd. 37, стр. 1380, 1931.

Кроме своего приложения к волновому уравнению Дирака, аппарат спинорного анализа оказался полезным в совершенно иной области физики, а именно в квантовой теории химической валентности.

Еще в прошлом столетии многим математикам и химикам бросалось в глаза сходство в комбинаторике валентных штрихов и аппарате алгебраической теории инвариантов. Студи (Study) в разделе математической энциклопедии, посвященном теории инвариантов, упоминает об этом и говорит, что «это сходство возбудило необоснованные надежды сделать этот отдел математики плодотворным для целей химии». Однако за последние годы в связи с успехами квантовой механики и развитием теории химической валентности оказалось, что именно аппарат спинорных инвариантов лежит в основе теории химической валентности [1]).

Настоящая книжка, насколько мне известно, является первой монографией по спинорному анализу, появляющейся в печати. Она рассчитана на математиков и физиков, знакомых с векторным и тензорным анализом в той степени, в которой он излагается в учебной литературе.

Академия наук СССР
Физический институт им. Лебедева
Москва, март 1935 г.

---

[1]) W. Heitler u. G. Rumer, «Zs. f. Phys.» 68, 12, 1931.

H. Weyl, «Göttinger Nachrichten», 1930, стр. 285, ibidem, 1931, стр. 31.

G. Rumer, «Göttinger Nachrichten», 1932, стр. 337.

G. Rumer, E. Teller u. H. Weyl, «Göttinger Nachrichten», 1932 стр. 499.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА ПЕРВАЯ

КОМПЛЕКСНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Комплексное векторное пространство n измерений определяется линейными комбинациями

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \ldots + c_n\mathbf{e}_n \tag{1.1}$$

n линейно независимых базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ с комплексными коэфициентами $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Линейная трансформация A в векторном пространстве сопоставляет каждому базисному вектору $\mathbf{e}_i$ новый базисный вектор

$$\mathrm{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_i = \sum_k a_{ik}\mathbf{e}_k \tag{1.2}$$

и каждой линейной комбинации $\mathbf{v}$ базисных векторов $\mathbf{e}_i$ — соответствующую линейную комбинацию $\mathbf{v}'$ векторов $\mathbf{e}'_i$:

$$\mathrm{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}' = \sum_i \sum_k c_i a_{ik} \mathbf{e}_k.$$

Коэфициенты a_{ik}, определяющие линейную трансформацию, образуют n-рядную матрицу

$$\| A \| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Если в векторном пространстве выполнить одну за другой две линейных трансформации — сперва A, потом B, где

$$\| A \| = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \| B \| = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

то мы получим:

$$\mathrm{BA}\mathbf{e}_i = \mathrm{B}\sum_k a_{jk}\mathbf{e}_k = \sum_j\sum_k b_{ij}a_{jk}\mathbf{e}_k.$$

Результирующая линейная трансформация $\mathrm{C} = \mathrm{BA}$ задается матрицей

$$\|C\| = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

коэфициенты которой определяются по формуле

$$c_{ik} = \sum_j b_{ij}a_{jk}. \tag{1.4}$$

В качестве примера векторного пространства рассмотрим совокупность однородных полиномов в двух и трех переменных.

1) Совокупность однородных полиномов $V(x, y)$ степени n в переменных x и y образует векторное пространство $(n+1)$ измерений

$$V_n(x, y) = c_0x^n + c_1x^{n-1}y + \ldots + c_ny^n. \tag{1.5}$$

Базисными векторами служат $(n+1)$ мономов

$$x^n, \quad x^{n-1}y, \quad x^{n-2}y^2, \quad \ldots, \quad y^n.$$

Мы можем выделить из этого $(n+1)$-мерного векторного пространства подпространство двух измерений, образуемое полиномами $V(x, y)$, удовлетворяющими уравнению Лапласа

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \tag{1.6}$$

Эти полиномы называются гармоническими.

Имеем:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \sum_i c_i(n-i)(n-i-1)\,x^{n-i-2}y^i,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \sum_i c_i\, i\,(i-1)_i x^{n-i}y^{i-2}.$$

Складывая оба выражения и написав результат сложения в виде однородного полинома степени $(n-2)$, мы получим:

$$\Delta V = \sum_j A_j x^{n-j-2}y^j = 0,$$

откуда следует, что $(n+1)$ коэфициентов $c_0, c_1, \ldots, c_n$ должны удовлетворять $(n-1)$ уравнениям:

$$A_0=0, \quad A_1=0, \ \ldots, \quad A_{n-2}=0,$$

и мы имеем лишь два независимых параметра α, β, через которые могут быть выражены коэфициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n$ гармонических полиномов.

Решение уравнений $A_j=0$ легче всего удается, если положить

$$V(x, y)=(ax+by)^n,$$

где $a^2+b^2=0$. Как легко убедиться, V будет при этих условиях гармоническим полиномом. Полагая $a=1$, $b=\pm i$, где $i=\sqrt{-1}$, мы получаем:

$$V_n(x, y)=\alpha(x+iy)^n+\beta(x-iy)^n$$

двумерное векторное пространство гармонических полиномов.

2) Совокупность однородных полиномов степени l в переменных x, y, z образует векторное пространство $\frac{(l+1)(l+2)}{2}$ измерений

$$V(x, y, z)=\sum c_{\rho\sigma\pi} x^\rho y^\sigma z^\pi,$$

где

$$\rho+\sigma+\pi=l.$$

Размерность векторного пространства легко определить, если написать $V_l(x, y, z)$ в виде:

$$V_l(x,y,z)=z^l f_0(x,y)+z^{l-1}f_1(x,y)+\ldots+z^r f_r(x,y)+\ldots+f_l(x,y),$$

где $f_r(x, y)$ — полиномы степени $r\,(0\leqslant r\leqslant l)$ в переменных x, y, каждый из которых содержит $(r+1)$ произвольных постоянных. Общее число коэфициентов $c_{\rho\sigma\pi}$ в полиноме $V_l(x, y, z)$ будет, следовательно:

$$\sum_{r=0}^{r=l}(r+1)=\frac{(l+1)(l+2)}{1\cdot 2}$$

Гармонические полиномы степени l в переменных (x, y, z) удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

и образуют векторное пространство $(2l+1)$ измерений. В самом деле, написав условие $\Delta V=0$ в виде полинома степени $(l-2)$

$$\sum A_{\sigma\pi\rho} x^\sigma y^\pi z^\rho = 0, \quad \sigma+\pi+\rho = l-2,$$

мы получим для коэфициентов $c_{\sigma\pi\rho}$ уравнения:

$$A_{\sigma\pi\rho}=0,$$

число которых равно:

$$\frac{(l-2+1)(l-2+2)}{1\cdot 2}=\frac{l(l-1)}{1\cdot 2}$$

Число независимых параметров, через которые могут быть выражены коэфициенты $c_{\sigma\pi\rho}$, равно, очевидно:

$$\frac{(l+1)(l+2)}{1\cdot 2}-\frac{l(l-1)}{1\cdot 2}=2l+1. \tag{1.7}$$

Для того чтобы выделить $(2l+1)$ гармонических полиномов, образующих векторный базис в пространстве $2l+1$ измерений, положим

$$V_l(x, y, z)=(ax+by+cz)^l,$$

где

$$a^2+b^2+c^2=0.$$

Как легко видеть, такой полином будет гармоническим.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Две линейных трансформации:

$$\left.\begin{array}{l} x^{1'}=a_{11}x^1+a_{12}x^2+\ldots+a_{1n}x^n \\ x^{2'}=a_{21}x^1+\qquad\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{n'}=a_{n1}x^1+\qquad\ldots+a_{nn}x^n \end{array}\right\}\text{(индексы наверху)} \tag{1.8}$$

$$\left.\begin{array}{l} y'_1=\breve{a}_{11}y_1+\qquad\ldots+\breve{a}_{1n}y_n \\ y'_2=\breve{a}_{21}y_1+\qquad\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n=\breve{a}_{n1}y_1+\qquad\ldots+\breve{a}_{nn}y_n \end{array}\right\}\text{(индексы внизу)} \tag{1.8a}$$

или сокращенно

$$x^{i'}=\sum_s a_{is}x^s, \qquad y'_i=\sum_r \breve{a}_{ir}y_r$$

переменных x^i, y_i в переменные $x^{i'}, y_i'$ называются контраградиентными друг к другу, если при этом остается инвариантной билинейная форма:

$$x^{1'}y_1' + x^{2'}y_2' + \ldots + x^{n'}y_n' = x^1 y_1 + x^2 y_2 + \ldots + x^n y_n$$

или сокращенно

$$\sum_s x^{s'} y_s' = \sum x^s y_s. \tag{1.9}$$

Подставляя в (1.9) выражения $x^{i'}$ и y_i', получим:

$$\sum_i \sum_s a_{is} x^s \sum_r \breve{a}_{ir} y_r = \sum_{r,s} \left(\sum_i a_{is} \breve{a}_{ir} \right) x_s y_r. \tag{1.10}$$

Сравнивая (1.9) с (1.10), получаем между коэфициентами двух контраградиентных трансформаций соотношение:

$$\sum_i a_{is} \breve{a}_{ir} = \delta_{sr}; \quad \delta_{sr} = \begin{cases} 1 & s = r \\ 0 & s \neq r \end{cases} \tag{1.11}$$

n — компонентная величина, которая трансформируется при помощи матрицы $\|a_{ik}\|$, называется контравариантным вектором, а величина, которая трансформируется при помощи матрицы $\|\breve{a}_{ik}\|$, — ковариантным вектором.

МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Мы говорим, что в векторном пространстве задана метрика или введено мероопределение, если при помощи матрицы $G = \|g_{ik}\|$ установлена зависимость между ко- и контравариантными величинами

$$\begin{aligned} y_1 &= g_{11} y^1 + g_{12} y^2 + \ldots + g_{1n} y^n, \\ y_2 &= g_{21} y^1 + \ldots + g_{2n} y^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= g_{n1} y^1 + \ldots + g_{nn} y^n \end{aligned} \tag{1.12}$$

или

$$y_i = \sum_s g_{is} y^s,$$

причем детерминант матрицы G отличен от нуля.

Подставляя (1.12) в (1.9), мы получим билинейную форму:

$$\sum_{s,\, r} g_{sr} x^s y^r,$$

которая при линейной трансформации (1.8) остается инвариантной.

С введением метрики пропадает различие между ко- и контравариантными векторами, и остается лишь различие между ко- и контравариантными компонентами одного и того же вектора.

Обычно ограничиваются рассмотрением метрики с симметричным мероопределением, полагая $g_{ik} = g_{ki}$. Между n^2 компонентами матрицы линейного преобразования $A = \|a_{ik}\|$ устанавливается тогда $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ соотношений вида:

$$\sum_{\rho,\, \sigma} g_{\rho\sigma} a_{i\rho} a_{k\sigma} = g_{ik}. \tag{1.13}$$

Независимых комплексных параметров, определяющих линейную трансформацию, будет в этом случае уже не n^2, а

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

Для наших целей необходимо, кроме векторного пространства с симметричным мероопределением, рассматривать также и пространства с *антисимметричным* мероопределением $g_{ik} = -g_{ki}$. Между n^2 компонентами a_{ik} матрицы линейного преобразования устанавливается тогда $\frac{(n-1)n}{1 \cdot 2}$ соотношений вида (1.13), и число независимых комплексных параметров будет в этом случае уже не n^2, а

$$n^2 - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}.$$

Поскольку мы находимся не в действительной, а в комплексной области, мы должны наряду с трансформациями $A = \|a_{ik}\|$ и

$\breve{\mathrm{A}}=\|\breve{a}_{ik}\|$ рассмотреть комплексно-сопряженные трансформации $\mathrm{A}^*=\|a^*_{ik}\|$ и $\breve{\mathrm{A}}^*=\|\breve{a}^*_{ik}\|$:

$$x^{*i'}=\sum a^*_{is}x^{*s};$$

$$y^{*'}_i=\sum \breve{a}^*_{is}y^*_s.$$

Величины, которые по ним трансформируются, мы будем называть комплексно-сопряженными векторами. Эти трансформации алгебраически независимы друг от друга. В самом деле, обозначая чертой действительные части и двумя чертами мнимые, мы можем записать:

$$\overline{\mathbf{x}}'=\overline{A}\overline{\mathbf{x}}-\overline{\overline{A}}\overline{\overline{\mathbf{x}}},\quad \overline{\overline{\mathbf{x}}}'=\overline{\overline{A}}\overline{\mathbf{x}}+\overline{A}\overline{\overline{\mathbf{x}}},$$

где

$$A=\overline{A}+i\overline{\overline{A}},\quad \mathbf{x}'=\overline{\mathbf{x}}'+i\overline{\overline{\mathbf{x}}}',\quad \mathbf{x}=\overline{\mathbf{x}}+i\overline{\overline{\mathbf{x}}}.$$

Это показывает, что оперирование n-рядными матрицами A и A* в n-мерном комплексном пространстве эквивалентно оперированию $2n$-рядными матрицами

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}+\mathrm{A}^* & -i(\mathrm{A}-\mathrm{A}^*) \\ i(\mathrm{A}-\mathrm{A}^*) & \mathrm{A}+\mathrm{A}^* \end{pmatrix}$$

в действительном пространстве $2n$ измерений.

В заключение рассмотрим линейное преобразование $\mathrm{A}=\|a_{ik}\|$, для которого

$$\breve{\mathrm{A}}=\mathrm{A}^*.$$

Такое специальное преобразование называется унитарным. Подставляя в (1·11) $\breve{a}_{ir}=a^*_{ir}$, получим для коэфициентов унитарного преобразования соотношение:

$$\sum_i a_{is}a^*_{ir}=\delta_{sr}. \qquad (1.11)$$

Как легко видеть, это унитарное преобразование оставляет инвариантным билинейную форму

$$x_1x^*_1+x_2x^*_2+\ldots+x_nx^*_n$$

и определяется $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ независимыми параметрами.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ГРУПП

Множество элементов G образует группу, если выполнены следующие четыре условия:

I. Каждой паре элементов a, b однозначно соответствует «произведение» — элемент $a \cdot b$, который также принадлежит к данной группе.

II. Для произведения элементов действителен ассоциативный закон

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

III. Существует элемент e, обладающий тем свойством, что $ae = ea = a$. Этот элемент называется единицей группы.

IV. Каждому элементу a соответствует некоторый другой элемент a' так, что $aa' = a'a = e$. Элемент a' называется обратным элементом a и обозначается через a^{-1}.

Группа называется абелевой, если $a \cdot b = b \cdot a$, и некоммутативной, если $a \cdot b \neq b \cdot a$.

Линейные трансформации в n-мерном пространстве с детерминантом, отличным от нуля, образуют некоммутативную группу

$$x^{i'} = \sum_s a_{is} x^s$$

с элементами

$$A = \| a_{ik} \| .$$

Произведение двух трансформаций есть опять линейная транс формация. Из

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}'' = \mathbf{B}\mathbf{x}'$$

следует:

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x}.$$

В общем случае $BA \neq AB$. Легко убедиться, что и остальные три требования для линейных трансформаций удовлетворены.

Перестановки из f предметов (например f аргументов функции) образуют группу из $f!$ элементов.

Пусть P — перестановка чисел 1, 2, 3, 4, 5, которая переводит 1 в 5, 5 в 4, 4 в 1, 2 в 3, 3 в 2. Мы пишем в этом случае:

$$P=(1\ 5\ 4)\ (2\ 3).$$

Это написание указывает, что P есть произведение циклических перестановок. Цикл, состоящий из перестановок двух предметов, называется транспозицией. Каждый цикл может быть представлен в виде произведения транспозиций. Например

$$(154)=(15)\ (54).$$

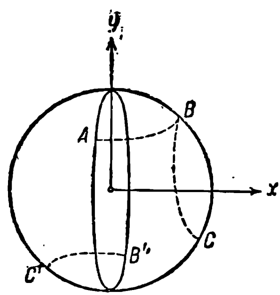
В самом деле:

$$(54)\,f\,(154)=f\,(145),$$
$$(15)\,f\,(145)=f\,(541)=(15)\ (54)\,f\,(154),$$
$$(154)\,f\,(154)=f\,(541).$$

Поэтому каждую перестановку можно разбить на произведение транспозиции.

Перестановки с четным числом транспозиций называются четными; с нечетным числом транспозиций — нечетными. Перестановки образуют некоммутативную группу. Например,

$$(123)\ (34)\,f\,(1234)=f\,(2341),$$
$$(34)\ (123)\,f\,(1234)=f\,(2413).$$



Черт. 1

Группа вращений. В отличие от группы перестановок, содержащей $f!$ элементов, группа вращений в пространстве имеет непрерывное множество элементов, характеризуемых значением трех параметров α, β, γ (например эйлеровских углов), определяющих вращение. Групповые свойства вращения особенно наглядно выясняются при рассмотрении вращения шара. Пусть вращение

$(\alpha', \beta', \gamma')$ переводит точку A на шаре в точку B, а вращение $(\alpha'', \beta'', \alpha'')$ — точку B в C. Очевидно, что существует вращение (α, β, γ), непосредственно переводящее точку A в точку C. Некоммутативность группы видна из следующего примера (см. черт. 1): вращение вокруг оси y на угол $\frac{\pi}{4}$, а затем вращение на угол π вокруг оси x переводит точку A через B в C. Вращение вокруг оси x на угол π, а затем на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг оси y переводит точку A через B' в C'.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ

Если между элементами двух групп $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{g}$ удается установить такое соответствие, что каждому элементу A из $\boldsymbol{G}$ соответствует элемент a из $\boldsymbol{g}$, так что произведению AB соответствует произведение ab им соответствующих элементов, то обе группы называются изоморфными и каждая из них является представлением другой. В случае если существует одно-однозначное соответствие между элементами групп $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{g}$, мы говорим, что каждая из них есть однозначное представление другой. Если элементу A соответствуют два элемента a и a' в группе $\boldsymbol{g}$, но каждому из элементов a из $\boldsymbol{g}$ соответствует лишь один элемент из $\boldsymbol{G}$, то мы говорим, что группа $\boldsymbol{g}$ есть двузначное представление группы $\boldsymbol{G}$, но $\boldsymbol{G}$ есть однозначное представление группы $\boldsymbol{g}$. Пример:

$\boldsymbol{g} = \{\pm\sqrt{n}\}$ образуется из квадратных корней всех положительных чисел,

$\boldsymbol{G} = \{n\}$ образуется из всех положительных чисел.

Каждому элементу из $\boldsymbol{G}$ соответствуют два элемента из $\boldsymbol{g}$.

Особую роль играют представления при помощи линейных трансформаций в многомерном пространстве. Для получения этих представлений надо установить такую связь между элементом группы a и матрицей линейного преобразования А, чтобы из

$$a \longrightarrow \| A \|, \quad b \longrightarrow \| B \|$$

следовало

$$ab \longrightarrow \| C \|,$$

где

$$c_{ik} = \sum a_{ij} b_{jk},$$

т. е. произведению элементов группы соответствовало произведение им соответствующих матриц.

Пример 1. Представление группы вращения в плоскости известно из аналитической геометрии. Отнесем элементу a_φ группы (вращение на угол φ) матрицу

$$a_\varphi \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что в группе вращений произведению a_φ на a_ψ соответствует элемент $a_{\varphi+\psi}$:

$$a_{\varphi+\psi} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & \sin(\varphi+\psi) \\ -\sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получим:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & \sin(\varphi+\psi) \\ -\sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix},$$

т. е. действительно мы имеем представление группы вращения в плоскости.

Пример 2. Для группы перестановок из трех предметов мы имеем шесть элементов:

(1) (12) (13) (23) (123) (132).

Выберем за пространство представления трехмерное пространство:

$$\begin{array}{lll} (1)\, x_1 = x_1 & (12)\, x_1 = x_2 & (13)\, x_1 = x_3 \\ (1)\, x_2 = x_2 & (12)\, x_2 = x_1 & (13)\, x_2 = x_2 \\ (1)\, x_3 = x_3 & (12)\, x_3 = x_3 & (13)\, x_3 = x_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (23)\, x_1 = x_1 & (123)\, x_1 = x_2 & (132)\, x_1 = x_3 \\ (23)\, x_2 = x_3 & (123)\, x_2 = x_3 & (132)\, x_2 = x_1 \\ (23)\, x_3 = x_2 & (123)\, x_3 = x_1 & (132)\, x_3 = x_2 \end{array}$$

Мы получим в качестве представления следующую систему матриц:

$$(1)\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\quad (12)\rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix};\quad (13)\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix};$$

$$(23)\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix};\quad (123)\rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix};\quad (132)\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Пусть нам удалось найти систему n-рядных матриц, дающих нам представление группы G, содержащей f элементов. Это значит, что в n-мерном пространстве нами определена система линейных трансформаций:

$$\| A_1 \| \quad \| A_2 \| \ldots \| A_f \|,$$

где $\| A_i \|$ — матрицы линейного преобразования, соответствующие элементу a_i группы. В случае если мы имеем непрерывную группу, зависящую от нескольких параметров (например группу вращений), мы будем писать:

$$\| A(\alpha, \beta, \gamma) \|,$$

где α, β, γ пробегает все допустимые значения параметров.

Перейдем в n-мерном пространстве к новому векторному базису. Тогда вектор $\mathbf{x}$ при помощи линейного преобразования перейдет в новый вектор $\mathbf{x}'$. Пусть зависимость $\mathbf{x}'$ от $\mathbf{x}$ выразится в виде:

$$\mathbf{x}' = S\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = S^{-1}\mathbf{x}',$$

где S — линейная трансформация элементов базиса.

Посмотрим, как при изменении базиса будут трансформироваться системы матриц $A_1, A_2, \ldots, A_f$.

Мы имеем:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x},$$

откуда следует:

$$S^{-1}\mathbf{y}' = AS^{-1}\mathbf{x}';$$

умножая обе части слева на S, получим:

$$\mathbf{y}' = SAS^{-1}\mathbf{x}'$$

Матрицы SAS^{-1} и A называются эквивалентными. Так как выбор базиса в n-мерном пространстве совершенно произволен, то, очевидно, и система матриц

$$SA_1S^{-1},\ SA_2S^{-1}, \ldots,\ SA_fS^{-1}$$

будет являться представлением группы G.

Может случиться, что при некотором удачно выбранном базисе *все матрицы* представления группы окажутся ступенчатыми:

$$A_i = \begin{pmatrix} A_i' & 0 \\ 0 & A_i'' \end{pmatrix},$$

где A_i' есть n'-рядная и A_i'' — n''-рядная матрица, причем, конечно, $n' + n'' = n$. Мы говорим в этом случае, что представление A_i приводимо и содержит в себе два представления A_i' и A_i'' нашей группы G, оба составленных из матриц с меньшим числом рядов.

В случае, если дальнейшее разбиение на ступени невозможно, мы говорим, что представление выредуцировано.

Покажем, что оба наши предыдущих примера представления группы приводимы.

Пример 1. Вращение в плоскости x, y

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Помножив второе уравнение на i, сложим и вычтем его из первого; получим:

$$(x' + iy') = (x + iy)\, e^{i\varphi},$$
$$(x' - iy') = (x - iy)\, e^{-i\varphi}.$$

При новом базисе $x + iy$ и $x - iy$ вместо x и y матрица $A(\varphi)$ будет иметь форму:

$$A'(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix},$$

т. е. представление распадается на два однорядных.

Из теории комплексных чисел мы знаем, что каждому вращению в плоскости соответствует умножение на комплексное число.

Пример 2. Покажем, что наше трехрядное представление группы перестановок трех предметов распадается на однорядное и двухрядное.

Если мы введем следующие линейные комбинации старых переменных:

$$x'_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad x'_2 = 2x_1 - x_2 - x_3, \quad x'_3 = x_2 - 2x_3 + x_1,$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

мы получим новую систему матриц:

$$(1) = \left(\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \quad (12) = \left(\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

$$(13) = \left(\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right); \quad (23) = \left(\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right);$$

$$(123) = \left(\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right); \quad (132) = \left(\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

которая также является представлением для нашей группы. Это представление отличается от старого тем, что все матрицы в нем ступенчатые. Мы можем поэтому выбрать и двухрядные матрицы как представление нашей группы и получим:

$$(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (12) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (13) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad (123) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (132) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

КРИТЕРИЙ НЕПРИВОДИМОСТИ

Рассмотрим в пространстве n измерений непрерывную систему матриц Σ, являющуюся представлением непрерывной группы $A(\alpha)$, каждая из которых переводит вектор $\mathbf{x}$ в некоторый вектор $\mathbf{y}(\alpha)$

$$\mathbf{y}(\alpha) = A(\alpha)\,\mathbf{x}.$$

Покажем, что если для двух заданных произвольных векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ всегда можно найти в системе матриц Σ такую матрицу $A(\alpha_0)$, которая переводила бы направление вектора $\mathbf{x}$ в направление вектора $\mathbf{y}$, т. е. чтобы имело место соотношение

$$\lambda\mathbf{y} = A(\alpha_0)\,\mathbf{x},$$

то система матриц неприводима.

Допустим противное, т. е. что мы можем выбрать базис так, что каждая из матриц $A(\alpha)$ распадается на две ступени порядка n' и n'', причем $n' + n'' = n$.

Выберем за вектор $\mathbf{x}$ такой вектор, у которого при новом базисе лишь первые n' компонент отличны от нуля.

$$\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n'},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)\ \text{(вектор типа I)},$$

а за вектор $\mathbf{y}$ — вектор, у которого лишь последние n'' компонент отличны от нуля:

$$\mathbf{y} = (0,\ \ldots,\ 0,\ y_{n'+1},\ \ y_{n'+2},\ \ldots,\ y_{n'+n''})\ \text{(вектор типа II)}.$$

Очевидно, что любая трансформация при помощи матрицы, принадлежащей к системе Σ, будет переводить вектор $\mathbf{x}$ в вектор типа I, и вектор $\mathbf{y}$ в вектор типа II, и мы никогда не сможем найти матрицу, переводящую направление вектора $\mathbf{x}$ в направление вектора $\mathbf{y}$.

СИСТЕМА ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Одним из наиболее плодотворных приложений теории групп является изучение систем гиперкомплексных чисел и представление этих чисел при помощи системы матриц.

В качестве первого примера разберем систему обыкновенных комплексных чисел вида $a + ib$. С точки зрения теории групп комплексные числа образуют группу G, элементы которой характеризуются двумя числами (a, b). Каждой паре элементов (a, b) и (a', b') относится элемент (a'', b''), называемый произведением элементов (a, b) на (a', b'), причем

$$(a'', b'') = (a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b).$$

Легко видеть, что группа комплексных чисел является перестановочной или абелевой группой.

Число $(a, -b)$ называется сопряженным числу (a, b). Произведению чисел $(a, -b)$ на (a, b) соответствует число

$$(a, -b)(a, b) = (a^2 + b^2, 0).$$

Этим пользуются для разложения суммы двух квадратов на линейные множители

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Мы можем изображать комплексное число (a, b) символом

$$A = a(1, 0) + b(0, 1)$$

и рассматривать его как вектор в векторном пространстве двух измерений. Базисными векторами будут в этом случае числа $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Образуем произведения:

$$(1, 0)A = a(1, 0) + b(0, 1),$$

$$(0, 1)A = -b(1, 0) + a(0, 1).$$

Мы заключаем отсюда, что умножению комплексного числа A на $(1, 0)$ соответствует идентичная трансформация вектора A при помощи матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а умножению на $(0, 1)$ — трансформация вектора A при помощи матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Эти две матрицы дают представление элементов $(1, 0)$ и $(0, 1)$ группы комплексных чисел. Произвольный элемент $A = (a, b)$ будет тогда представлен матрицей:

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Легко непосредственно проверить, что умножение матриц такого вида эквивалентно умножению комплексных чисел

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'-bb' & ab'+a'b \\ ab'+a'b & aa'-bb' \end{pmatrix}.$$

Обобщая понятие простого комплексного числа, мы назовем гиперкомплексным числом порядка h совокупность *h комплексных чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_h$, $A=\{a_1 a_2 \ldots a_h\}$, для которых определена операция умножения, в силу которой двум гиперкомплексным числам A' и A'' однозначно относится третье число A''', называемое их произведением:

$$\{a_1' a_2' \ldots a_h\}\{a_1'' \ldots a_h''\}=\{a_1''' \ldots a_h'''\}.$$

Одной из наиболее важных систем гиперкомплексных чисел являются кватернионы, представляемые матрицами:

$$Q=\{a_0 a_1 a_2 a_3\}=\begin{pmatrix} a_0+a_3 & a_1+ia_2 \\ a_1-ia_2 & a_0-a_3 \end{pmatrix}.$$

Легко найти правила умножения кватернионов

$$\begin{pmatrix} a_0+a_3, & a_1+ia_2 \\ a_1-ia_2, & a_0-a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0+b_3, & b_1+ib_2 \\ b_1-ib_2, & b_0-b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_0+c_3, & c_1+ic_2 \\ c_1-ic_2, & c_0-c_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} c_0&=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,\\ c_1&=a_1b_0+a_0b_1+i(a_2b_3-a_3b_2),\\ c_2&=a_2b_0+a_0b_2+i(a_3b_1-a_1b_3),\\ c_3&=a_3b_0+a_0b_3+i(a_1b_2-a_2b_1). \end{aligned}$$

Мы можем рассматривать кватернион $Q=(a_0 a_1 a_2 a_3)$ как вектор в четырехмерном комплексном векторном пространстве. Базисными векторами в этом случае будут кватернионы

$$s_0=\{1,0,0,0\},\ s_1=\{0,1,0,0\},\ s_2=\{0,0,1,0\},\ s_3=\{0,0,0,1\},$$

представляемые матрицами [1])

$$s_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad s_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad s_2=\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},\quad s_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

---

[1]) Изобретатель кватернионов Гамильтон пользовался вместо матриц s_0, s_1, s_2, s_3 матрицами s_0, is_1, is_2, is_3.

Легко убедиться, что группа кватернионов не будет абелевой. В самом деле:

$$
\begin{aligned}
s_1 s_2 &= i s_3, & s_2 s_1 &= -s_3,\\
s_2 s_3 &= i s_1, & s_3 s_2 &= -i s_1,\\
s_3 s_1 &= i s_2, & s_3 s_1 &= -i s_2,
\end{aligned}
$$

откуда следует, что $Q'Q'' \neq Q''Q'$.

Мы можем изображать кватернион по аналогии с простыми комплексными числами символом

$$Q = s_0 a_0 + s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3 a_3,$$

где s_0, s_1, s_2, s_3 играет ту же роль, что 1 и i в системе простых комплексных чисел.

Кватернион $\tilde{Q} = \{a_0, -a_1, -a_2, -a_3\}$ называется сопряженным кватерниону $Q = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$. Вычислим произведение $Q\tilde{Q} = \tilde{Q}Q$. Имеем:

$$Q\tilde{Q} = \tilde{Q}Q = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2.$$

Вид квадратичной формы указывает на тесную связь кватернионов с группой Лоренца.

Однако, как мы дальше покажем (см. стр. 50), с группой Лоренца тесно связана более общая система гиперкомплексных чисел 16-го порядка (сединионы), частным случаем которых являются кватернионы.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ГРУППА БИНАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Мы будем изучать комплексное векторное пространство двух измерений, в котором при помощи билинейной формы

$$\xi^1\eta^2-\xi^2\eta^1 \tag{3.1}$$

задана антисимметричная метрика. Метрическая матрица G будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Векторы в этом пространстве мы будем называть спинорами $\mathbf{x}=(\xi^1,\ \xi^2)$, $\mathbf{y}=(\eta^1,\ \eta^2)$ и рассматривать группу линейных преобразований:

$$\left.\begin{aligned} \xi^{1'} &= \alpha\xi^1+\beta\xi^2, \\ \xi^{2'} &= \gamma\xi^1+\delta\xi^2, \\ \sigma &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \quad (3.3) \qquad \left.\begin{aligned} \xi^{*1'} &= \alpha^*\xi^{*1}+\beta^*\xi^{*2}, \\ \xi^{*2'} &= \gamma^*\xi^{*1}+\delta^*\xi^{*2}, \\ \sigma^* &= \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \quad (3.3^*)$$

оставляющих инвариантной метрическую билинейную форму. Группу таких линейных преобразований мы назовем бинарной группой. Число независимых комплексных параметров, определяющих трансформацию, будет равняться

$$2^2-\frac{2\cdot 1}{2}=3,$$

а число действительных параметров будет $2\cdot 3=6$.

Из условия

$$\xi^{1'}\eta^{2'}-\xi^{2'}\eta^{1'}=\xi^1\eta^2-\xi^2\eta^1$$

легко найдем:

$$(\alpha\xi^1+\beta\xi^2)(\gamma\eta^1+\delta\eta^2)-(\gamma\xi^1+\delta\xi^2)(\alpha\eta^1+\beta\eta^2)=(\alpha\delta-\beta\gamma)(\xi^1\eta^2-\xi^2\eta^1)$$

и получим условие, которому должны удовлетворять коэфициенты α, β, γ, δ:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma) = 1.$$

В дальнейшем мы будем сокращенно обозначать метрическую форму через

$$[xy] = \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1.$$

Билинейная форма (3.1) устанавливает в пространстве спиноров метрику, и мы можем определить ковариантные компоненты спинора, положив:

$$[xy] = \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1 = \xi^1\eta_1 + \xi^2\eta_2 = g_{\lambda\mu}\xi^\lambda\eta^\mu, \tag{3.5}$$

где

$$g_{11} = 0, \quad g_{12} = 1, \quad g_{21} = -1, \quad g_{22} = 0.$$

Формулы для перехода от контравариантных компонент к ковариантным имеют, следовательно, следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\eta^2 = \eta_1, \quad \eta^1 = -\eta_2 \\ &\text{или} \\ &\eta_\lambda = \sum_{\mu=1}^{\mu=2} g_{\lambda\mu}\eta^\mu. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Эти формулы дают нам возможность записать две линейных трансформации, контраградиентных к трансформациям (3.4) и (3.4*):

$$\left.\begin{aligned} &\eta_1' = \delta\eta_1 - \gamma\eta_2, \quad \eta_2' = -\beta\eta_1 + \alpha\eta_2, \\ &\breve{\sigma} = \begin{pmatrix} \breve{\alpha} & \breve{\beta} \\ \breve{\gamma} & \breve{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\eta_1^{*\prime} = \delta^*\eta_1^* - \gamma^*\eta_2^*, \quad \eta_2' = -\beta^*\eta_1^* + \alpha^*\eta_2^*, \\ &\breve{\sigma}^* = \begin{pmatrix} \breve{\alpha}^* & \breve{\beta}^* \\ \breve{\gamma}^* & \breve{\delta}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^* & -\gamma^* \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{3.4*}$$

СПИНОРНАЯ АЛГЕБРА

Как и в обычной тензорной алгебре, мы будем обозначать величины, которые трансформируются как компонента спинора, через a^λ или a_λ $(\lambda = 1,2)$.

Величины, которые трансформируются как компоненты комплексно-сопряженного спинора, мы будем обозначать для удобства точкой над индексом. Вместо $a^{*\lambda}$ или a^*_λ мы будем в дальнейшем писать $a^{\dot\lambda}$ или $a_{\dot\lambda}$. От спинвекторов перейдем к рассмотрению спинтензоров, определив последние так, как это делается в обычном тензорном анализе.

Мы назовем спинтензором второго ранга четырехкомпонентную величину $a_{\lambda\mu}$ $(\lambda, \mu = 1, 2)$, компоненты которой трансформируются как произведения $\xi_\lambda \eta_\mu$ компонент спиноров. Вводя для сокращения вместо слов: «трансформируются как» значок $\sim$, мы можем записать:

$$a_{11} \sim \xi_1 \eta_1, \quad a_{12} \sim \xi_1 \eta_2, \quad a_{21} \sim \xi_2 \eta_1, \quad a_{22} \sim \xi_2 \eta_2.$$

Аналогично мы определим комплексно-сопряженный спинтензор второго ранга, компоненты которого трансформируются как: $a_{\dot\lambda\dot\mu} \sim \xi^*_\lambda \eta^*_\mu$.

Кроме этих двух спинтензоров второго ранга, мы можем еще определить комплексно-смешанный спинтензор, компоненты которого трансформируются как $a_{\lambda\dot\mu} \sim \xi_\lambda \eta^*_\mu$.

Комплексно-смешанный спинтензор не следует смешивать со смешанными компонентами простых спинтензоров, например

$$a_\lambda^{\mu} \sim \xi_\lambda \eta^\mu, \quad a_{\dot\lambda}^{\dot\mu} \sim \xi^*_\lambda \eta^{*\mu}.$$

Переход от ковариантных компонент спинтензора к контравариантным и смешанным легко осуществляется при помощи формул (3.6).

Например:

$$a_{12} = -a_1^1 = -a^{21}, \quad a_{11} = a_1^2 = a^{22} \text{ и т. д.}$$

Таким же образом определяются спинтензоры любого ранга. Например:

$$a_{\lambda\nu\rho}^{\dot\mu} \sim \xi_\lambda \eta^{*\mu} \zeta_\nu \pi_\rho.$$

Как и в обычной тензорной алгебре, мы имеем здесь лишь две операции: умножение и свертывание. Например, из двух спиноров второго и третьего рангов: $a_{\lambda\dot{\mu}}$ и $b^{\nu\dot{\rho}\sigma}$ мы можем образовать спинтензор пятого ранга:

$$a_{\lambda\dot{\mu}}\, b^{\nu\dot{\rho}\sigma}.$$

Суммируя компоненты, у которых $\lambda = \nu$, мы получаем из него тензор третьего ранга:

$$\sum_{\lambda} a_{\lambda\dot{\mu}}\, b^{\lambda\dot{\rho}\sigma} = c_{\dot{\mu}}^{\dot{\rho}\sigma}.$$

Свертывая по индексу $\dot{\mu} = \dot{\rho}$, мы получаем спинор первого ранга:

$$\sum_{\dot{\mu}} c_{\dot{\mu}}^{\dot{\mu}\sigma} = d^{\sigma}.$$

В спинорном анализе, как и в тензорном, мы условимся опускать знак суммирования, если в формуле встречается два раза один и тот же индекс внизу и наверху.

Заметим несколько правил, пользование которыми облегчает операции с спинтензорами.

1) Имеем:

$$[\mathbf{xy}] = \xi_1\eta^1 + \xi_2\eta^2 = \xi_\lambda\eta^\lambda = -\xi^2\eta_2 - \xi^1\eta_1 = -\xi^\lambda\eta_\lambda.$$

Следовательно:

$$\xi_\lambda\eta^\lambda = -\xi^\lambda\eta_\lambda.$$

Как следствие вытекает, что для всякого спинтензора нечетного ранга:

$$a^{\lambda}\, a_{\lambda} \equiv 0,\ \ a^{\lambda\mu\nu}\, a_{\lambda\mu\nu} \equiv 0.$$

2) Как легко убедиться непосредственным вычислением:

$$[\mathbf{ab}]\,[\mathbf{cd}] + [\mathbf{ac}]\,[\mathbf{db}] + [\mathbf{ad}]\,[\mathbf{bc}] = 0.$$

Переписав это тождество в тензорной форме, имеем:

$$a_\lambda b^\lambda c_\mu d^\mu + a_\lambda c^\lambda d_\mu b^\mu + a_\lambda d^\lambda b_\mu c^\mu \equiv 0.$$

Вынося a_λ за скобку, получим:

$$b^\lambda c_\mu d^\mu + c^\lambda d_\mu b^\mu + d^\lambda b_\mu c^\mu \equiv 0,$$

или, применяя первое правило

$$b^\lambda c^\mu d_\mu + c^\lambda d^\mu b_\mu + d^\lambda b^\mu c_\mu \equiv 0,$$

или

$$b^\lambda c^\mu d_\mu + b_\mu c^\lambda d^\mu + b^\mu c_\mu d^\lambda \equiv 0.$$

3) Так как бинарные трансформации (3.3) и (3.4) алгебраически независимы друг от друга, в смешанных спинтензорах нет необходимости фиксировать последовательность пунктирных и непунктирных индексов. Например:

$$a_{\lambda\dot{\mu}} = a_{\dot{\mu}\lambda}; \quad a_{\dot{\lambda}\mu\nu} = a_{\mu\dot{\lambda}\nu} = a_{\mu\nu\dot{\lambda}}.$$

4) Если в спинтензорном уравнении заменить все пунктирные индексы непунктирными и наоборот, то мы получим комплексно-сопряженное уравнение.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БИНАРНОЙ ГРУППЫ

Рассмотрим выражение:

$$I = \frac{[\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}]^v}{v!} \frac{[\mathbf{y}^*\bar{\mathbf{y}}^*]^{v'}}{v!} = \frac{1}{v!\, v'!} (\xi_1 \bar{\xi}^1 + \xi_2 \bar{\xi}^2)^v (\eta_{\dot{1}} \bar{\eta}^{\dot{1}} + \eta_{\dot{2}} \bar{\eta}^{\dot{2}})^{v'}, \qquad (3.7)$$

остающееся инвариантным, если спиноры $\mathbf{x}$, $\bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{y}^*$, $\bar{\mathbf{y}}^*$ подвергнуть бинарной трансформации. Раскрывая скобки и обозначая

$$\left.\begin{aligned} f_{rs} &= \frac{\xi_1^{v-r}\ \xi_2^r}{\sqrt{r!\,(v-r)!}} \cdot \frac{\eta_{\dot{1}}^{v'-s}\ \eta_{\dot{2}}^s}{\sqrt{s!\,(v-s)!}} \\ f^{rs} &= \frac{\bar{\xi}^{1v-r}\ \xi^{2v}}{\sqrt{r!\,(v-r)!}} \cdot \frac{\bar{\eta}^{1v'-s}\,\bar{\eta}^{2s}}{\sqrt{s!\,(v-s)!}}, \end{aligned}\right\} \quad 0 < r < v,\ 0 < s < v', \qquad (3.8)$$

мы получим для инварианта I выражение:

$$I = \sum_{r,s} f_{rs} f^{rs}. \qquad (3.9)$$

Величины f_{rs} и f^{rs} мы назовем полиспинорами. Они трансформируются при бинарной трансформации между собой при помощи $(v+1)(v'+1)$-рядной матрицы, которую мы обозначим через $D_{vv'}$

а отдельные компоненты ее — через $D_{vv'}(r, s \| \rho, \sigma)$. Подставляя в (3.8) выражения для $\xi_\lambda\ \bar{\xi}_\lambda\ \eta_\lambda\ \bar{\eta}_\lambda$ в новой системе отсчета, мы получим:

$$\left.\begin{aligned} f^{rs'} &= \sum_{\rho, \sigma} D_{vv'}(r, s \| \rho, \sigma) f^{\rho\sigma}, \\ f'_{rs} &= \sum_{\rho, \sigma} \breve{D}_{vv'}(r, s \| \rho, \sigma) f_{\rho\sigma}, \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

причем из (3.9) следует, что матрицы $D_{vv'}$ и $\breve{D}_{vv'}$ контраградиентны друг другу.

В дальнейшем мы будем рассматривать симметричные в индексах спинтензоры с $(v+1)(v'+1)$ компонентами, которые при бинарной трансформации трансформируются как полиспиноры f_{rs} и f^{rs}

$$a_{\underbrace{11\ldots1}_{v-r},\ \underbrace{22\ldots2}_{r},\ \underbrace{\dot{1}\dot{1}\ldots\dot{1}}_{v-s},\ \underbrace{\dot{2}\dot{2}\ldots\dot{2}}_{s}} \sim f_{rs},$$

$$a^{\overbrace{11\ldots1}^{v-r},\ \overbrace{22\ldots2}^{r},\ \overbrace{\dot{1}\dot{1}\ldots\dot{1}}^{v-s},\ \overbrace{\dot{2}\dot{2}\ldots\dot{2}}^{s}} \sim f^{rs}.$$

Каждой бинарной трансформации σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

соответствует в пространстве полиспинора от нее зависящая трансформация

$$D_{vv'}(\sigma),$$

причем произведению двух бинарных трансформаций $\sigma'\sigma''$ соответствует произведение $D_{vv'}(\sigma') \cdot D_{vv'}(\sigma'')$ соответствующих трансформаций полиспинора. Мы имеем, следовательно, в системе матриц $D_{vv'}$ представление бинарной группы. Докажем теперь основную теорему: *представления $D_{vv'}(\sigma)$ бинарной группы являются неприводимыми представлениями.*

Мы можем рассматривать совокупность $(v+1)(v'+1)$ компонент полиспинора как базисные векторы в пространстве $(v+1)$ $(v'+1)$ измерений. Каждый полином степени v в переменных $\xi^1\ \xi^2\ \bar{\xi}^1\ \bar{\xi}^2$ и степени v' в переменных $\eta^{*1}\ \bar{\eta}^{*1}\ \eta^{*1}\ \bar{\eta}^{*2}$ может быть представлен в виде

$$P(\mathrm{x}, \bar{\mathrm{x}}, \mathrm{y}, \bar{\mathrm{y}}) = \sum a_{rs} f^{rs},$$

где a_{rs} — система $(v+1)(v'+1)$ постоянных чисел.

Мы убедимся в неприводимости представления $D_{vv'}$ бинарной группы, если докажем, что для любого базисного вектора f^{rs} и любого полинома P существует такое специальное преобразование σ_{rs}, для которого имеет место соотношение:

$$D_{vv'}(\sigma_{rs})P = \lambda f^{rs},$$

где λ — некоторое число.

Специальная бинарная трансформация A

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}^* = \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^*} \end{pmatrix}$$

преобразует каждый моном f^{rs} в моном

$$f^{rs} \to a^{v-2r} a^{*v'-2s} f^{rs}.$$

Мы имеем следующие равенства:

$$(A - a^{v-2r} a^{*v'-2s}) f_{rs} = 0,$$

$$(A - a^{v-2r} a^{*v'-2s}) f_{\rho\sigma} = (a^{v-2\rho} a^{*v'-2\sigma} - a^{v-2r} a^{*v'-2s}) f_{\rho\sigma}.$$

Если мы теперь подействуем на полином P последовательно всеми $(v+1)(v'+1)$ операциями $(A - a^{v-2\rho} a^{*v'-2\sigma})$ за исключением одной операции $(A - a^{v-2r} a^{*v'-2s})$, то он в силу сказанного превратится в

$$a_{rs} \prod_{\rho,\sigma}{}' (a^{v-2r} a^{*v'-2s} - a^{v'-2\rho} a^{*v'-2\sigma}) f^{rs},$$

где штрих у знака произведения означает, что пропущен член

$$\rho = r, \quad \sigma = s.$$

Искомая трансформация σ_{rs}, для которой

$$D_{vv'}(\sigma_{rs}) P = \lambda f^{rs},$$

имеет, следовательно, вид:

$$\sigma_{rs} = \prod_{\rho,\sigma}{}' (A - a^{v-2\rho} a^{*v'-2r}),$$

где штрих означает, как и выше, что пропущен член с $\rho = r$, $\sigma = s$.

Для множителя λ имеем:

$$\lambda = a_{r,s} \prod_{\rho,\sigma}' (a^{r-2r} a^{*v'-2s} - a^{v'-2\rho} a^{*v'-2s}).$$

Так как очевидно, что надлежащим выбором числа a можно всегда достигнуть, что все скобки в произведении будут отличны от нуля, то наша теорема доказана.

ФОРМУЛА КЛЕБША-ГОРДАНА

Пусть нам заданы два полиспинора f_{rs} и $\varphi_{\rho\sigma}$, трансформирующихся при бинарной трансформации по $D_{vv'}$ и $D_{uu'}$; составим из них попарные произведения

$$\Phi_{rs,\,\rho\sigma} = f_{rs} \cdot \varphi_{\rho\sigma}.$$

Совокупность $N = (v+1)(v'+1)(w+1)(w'+1)$ величин трансформируется при бинарной трансформации при помощи N-мерного представления бинарной группы, которое, однако, не будет неприводимым. Наша задача заключается в том, чтобы составить из N величин такие линейные комбинации, которые трансформировались бы по неприводимым представлениям. Другими словами, мы должны в N-мерном пространстве так выбрать новый базис, чтобы трансформационные матрицы величин $\Phi'_{rs,\,\rho\sigma}$ оказались ступенчатыми. Для решения этой задачи перейдем от полиспиноров к спинтензорам:

$$a_{\underbrace{\lambda\ldots\mu}_{v},\, \underbrace{\dot\lambda\ldots\dot\mu}_{v'}}, \quad b_{\underbrace{\lambda'\ldots\mu'}_{w},\, \underbrace{\dot\lambda'\ldots\dot\mu'}_{w'}}.$$

Составим произведение:

$$a_{\lambda\ldots\mu,\, \dot\lambda\ldots\dot\mu}\, b_{\lambda'\ldots\mu',\, \dot\lambda'\ldots\dot\mu'}$$

и симметризируем его в индексах $\lambda\ldots\mu$, $\lambda'\ldots\mu'$ и индексах $\dot\lambda\ldots\dot\mu$, $\dot\lambda'\ldots\dot\mu'$. Полученная линейная комбинация

$$\sum \pm a_{\lambda\ldots\mu,\, \dot\lambda\ldots\dot\mu}\, b_{\lambda'\ldots\mu',\, \dot\lambda'\ldots\dot\mu'} \tag{3.11}$$

трансформируется как симметричный спинтензор

$$c_{\lambda\ldots\mu,\ \lambda'\ldots\mu',\ \dot\lambda\ldots\dot\mu,\ \dot\lambda'\ldots\dot\mu'}$$

по

$$D_{v+w,\ v'+w'}.$$

Для того чтобы найти дальнейшие линейные комбинации, свернем в (3.11) по индексам λ и λ' и, получив

$$a_{\lambda\sigma\ldots\mu,\ \dot\lambda\ldots\dot\mu},\quad b^{\lambda}{}_{\sigma'\ldots\mu',\ \dot\lambda'\ldots\dot\mu'},$$

симметризируем его в оставшихся индексах.

Полученная линейная комбинация трансформируется как спинтензор

$$c_{\underbrace{\sigma\ldots\mu}_{v-1},\ \underbrace{\dot\sigma\ldots\dot\mu}_{v'},\ \underbrace{\sigma'\ldots\mu'}_{w-1},\ \underbrace{\dot\sigma'\ldots\dot\mu'}_{w'}}$$

по

$$D_{v+w-2,\ v'+w'}.$$

Мы могли бы также свернуть по индексам $\dot\lambda$ и $\dot\lambda'$ и получить линейную комбинацию трансформирующихся по $D_{v+w,\ v'+w'-2}$.

Продолжая свертывание по двум индексам

$$\lambda=\lambda',\quad \mu=\mu',$$

по трем индексам и т. д., мы придем, наконец, к линейной комбинации членов $\Phi_{rs,\rho\sigma}$, трансформирующихся как спинтензор

$$c_{\underbrace{\lambda\ldots\mu}_{|v-w|},\ \underbrace{\dot\lambda\ldots\dot\mu}_{|v'-w'|}},$$

т. е. по

$$D_{|v-w|,\ |v'-w'|}.$$

Трансформационная матрица величин $\Phi_{rs,\rho\sigma}$ распадается, следовательно, на следующие ступени:

$$\begin{array}{l}
D_{v+w,\ v'+w'},\quad D_{v+w,\ v'+w'-2}\ \ldots D_{v+w,\ |v'-w'|}\\
D_{v+w-2,\ v'+w'},\ D_{v+w-2,\ v'+w'-2}\ldots\\
D_{v+w-4,\ v'+w'}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
D_{|v-w|,\ v'+w'}\ D_{|v-w|,\ v'+w'-2}\ldots D_{|v-w|,\ |v'-w'|}.
\end{array}$$

В таблице заключена формула Клебша-Гордана. Покажем на примере, как ею пользоваться в приложениях.

ПРИЛОЖЕНИЕ ФОРМУЛЫ КЛЕБША-ГОРДАНА

Перемножим четыре компоненты спинтензора $a_{\lambda\dot{\mu}}$:

$$a_{1\dot{1}} \quad a_{1\dot{2}} \quad a_{2\dot{1}} \quad a_{2\dot{2}}\,,$$

трансформирующиеся по D_{11}, попарно с четырьмя компонентами спинтензора $b_{\rho\dot{\sigma}}$:

$$b_{1\dot{1}}\, b_{1\dot{2}}\, b_{2\dot{1}}\, b_{2\dot{2}}\,,$$

трансформирующимися по D_{11}, и получим 16 величин вида $a_{\lambda\dot{\mu}}\, b_{\rho\dot{\sigma}}$.

Симметризируя в индексах $\lambda\rho$ и $\dot{\mu}$, $\dot{\sigma}$, мы получим 9 линейных комбинаций, трансформирующихся по $D_{2,2}$:

$$c_{\lambda\rho\dot{\mu}\dot{\sigma}} = a_{\lambda\dot{\mu}}\, b_{\rho\dot{\sigma}} + a_{\rho\dot{\mu}}\, b_{\lambda\dot{\sigma}} + a_{\lambda\dot{\sigma}}\, b_{\rho\dot{\mu}} + a_{\rho\dot{\sigma}}\, b_{\lambda\dot{\mu}}, \tag{3.12}$$

$$c_{11\dot{1}\dot{1}} = 4a_{1\dot{1}}\, b_{1\dot{1}}; \quad c_{11\dot{1}\dot{2}} = 2\,(a_{1\dot{1}}\, b_{1\dot{2}} + a_{1\dot{2}}\, b_{1\dot{1}}); \quad c_{11\dot{2}\dot{2}} = 4a_{1\dot{2}}\, b_{1\dot{2}},$$

$$c_{12\dot{1}\dot{1}} = 2\,(a_{\dot{1}1} b_{\dot{1}2} + a_{\dot{1}2} b_{\dot{1}1}),$$

$$c_{12\dot{1}\dot{2}} = (a_{1\dot{1}}\, b_{2\dot{2}} + a_{1\dot{2}} b_{2\dot{1}} + a_{2\dot{1}}\, b_{1\dot{2}} + a_{2\dot{2}}\, b_{1\dot{1}}),$$

$$c_{12\dot{2}\dot{2}} = 2\,(a_{1\dot{2}}\, b_{2\dot{2}} + a_{2\dot{2}}\, b_{1\dot{2}}),$$

$$c_{22\dot{1}\dot{1}} = 4a_{\dot{1}2}\, b_{1\dot{2}}, \qquad c_{22\dot{1}\dot{2}} = 2\,(a_{\dot{1}2}\, b_{2\dot{2}} + a_{2\dot{2}}\, b_{\dot{1}2}), \qquad c_{22\dot{2}\dot{2}} = 4a_{2\dot{2}}\, b_{2\dot{2}}.$$

Свертывая по индексам λ, ρ и симметризируя по индексам $\dot{\sigma}$ и $\dot{\mu}$, мы получим три линейных комбинации, трансформирующихся по $D_{0,2}$:

$$\left.\begin{aligned}
c_{\dot{\mu}\dot{\sigma}} &= a_{\lambda\dot{\mu}}\, b^{\lambda}_{\dot{\sigma}} + a_{\lambda\dot{\sigma}}\, b^{\lambda}_{\dot{\mu}}\,,\\
c_{\dot{1}\dot{1}} &= 2\,(a_{1\dot{1}}\, b^{1}_{\dot{1}} + a_{2\dot{1}}\, b^{2}_{\dot{1}}),\\
c_{\dot{1}\dot{2}} &= a_{1\dot{1}} b^{1}_{\dot{2}} + a_{2\dot{1}} b^{2}_{\dot{2}} + a_{1\dot{2}}\, b^{1}_{\dot{1}} + a_{2\dot{2}}\, b^{2}_{\dot{1}}\,,\\
c_{\dot{2}\dot{2}} &= 2\,(a_{1\dot{2}}\, b^{1}_{\dot{2}} + a_{2\dot{2}}\, b^{2}_{\dot{2}})
\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

или переходя к ковариантным компонентам:

$$c_{\dot{1}\dot{1}} = 2\,(a_{2\dot{1}}\, b_{1\dot{1}} - a_{1\dot{1}}\, b_{2\dot{1}}),$$

$$c_{\dot{1}\dot{2}} = a_{2\dot{1}}\, b_{1\dot{2}} - a_{1\dot{1}}\, b_{2\dot{2}} + a_{2\dot{2}}\, b_{1\dot{1}} - a_{1\dot{2}}\, b_{2\dot{1}},$$

$$c_{\dot{2}\dot{2}} = 2\,(a_{2\dot{2}}\, b_{1\dot{2}} - a_{1\dot{2}}\, b_{2\dot{2}}).$$

Свертывая по индексам $\dot{\sigma}$ и $\dot{\mu}$ и симметризируя по индексам λ

и ρ, мы получим три линейных комбинации, трансформирующихся по $D_{2,0}$:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2\,(a_{\dot{2}1}\, b_{\dot{1}1} - a_{\dot{1}1}\, b_{\dot{2}1}), \\ c_{12} &= a_{\dot{2}1}\, b_{\dot{1}2} - a_{\dot{1}1}\, b_{\dot{2}2} + a_{\dot{2}2}\, b_{\dot{1}1} - a_{\dot{1}2}\, b_{\dot{2}1}, \\ c_{22} &= 2\,(a_{\dot{2}2}\, b_{1\dot{2}} - a_{\dot{1}2}\, b_{\dot{2}2}). \end{aligned}$$

Свертывая, наконец, по индексам $\dot{\sigma}$ и $\dot{\mu}$, λ и ρ, мы получим инвариант, трансформирующийся по $D_{0,\,0}$:

$$\left.\begin{aligned} c &= a_{\lambda\dot{\mu}}\, b^{\lambda\dot{\mu}}, \\ c &= a_{1\dot{1}} b^{1\dot{1}} + a_{2\dot{1}}\, b^{\dot{2}1} + a_{1\dot{2}}\, b^{\dot{1}2} + a_{2\dot{2}}\, b^{2\dot{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Переходя от контравариантных компонент к ковариантным, мы получим:

$$c = a_{1\dot{1}}\, b_{2\dot{2}} - a_{2\dot{1}}\, b_{1\dot{2}} + a_{2\dot{2}}\, b_{1\dot{1}} - a_{1\dot{2}}\, b_{2\dot{1}}.$$

Итак, выбрав за базис 16 линейных комбинаций

$c_{\lambda\mu\dot{\sigma}\dot{\rho}}$ . . . . 9 компонент
$c_{\dot{\lambda}\dot{\mu}}$ . . . . 3 компоненты
$c_{\lambda\mu}$ . . . . 3 компоненты
c . . . . 1 компонента

мы редуцируем шестнадцатирядное представление бинарной группы и оно распадается на следующие неприводимые представления:

$D_{2,2}$ . . . . девятирядное,
$D_{0,2}$ . . . . трехрядное,
$D_{2,0}$ . . . . трехрядное,
$D_{0,0}$ . . . . однорядное.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ГРУППА ЛОРЕНЦА

Рассмотрим спинтензор $a_{\lambda\dot{\mu}} = a_{\dot{\mu}\lambda}$ с четырьмя компонентами

$$a_{1\dot{1}},\ a_{1\dot{2}},\ a_{2\dot{1}},\ a_{2\dot{2}},$$

которые при бинарной трансформации трансформируются как произведения

$$\xi_1\xi^*_1,\ \xi_1\xi^*_2,\ \xi_2\xi^*_1,\ \xi_2\xi^*_2,$$

т. е. по $\boldsymbol{D}_{11}$ представлению бинарной группы.

Составим детерминант

$$\begin{vmatrix} a_{1\dot{1}} & a_{1\dot{2}} \\ a_{2\dot{1}} & a_{2\dot{2}} \end{vmatrix} = (a_{1\dot{1}}a_{2\dot{2}} - a_{1\dot{2}}a_{2\dot{1}})$$

и покажем, что он инвариантен. В самом деле, пользуясь правилами для перехода от контравариантных компонент к ковариантным, мы можем записать:

$$a_{1\dot{1}}a_{2\dot{2}} - a_{1\dot{2}}a_{2\dot{1}} = \frac{1}{2}\{a_{1\dot{1}}a^{1\dot{1}} + a_{1\dot{2}}a^{1\dot{2}} + a_{2\dot{1}}a^{2\dot{1}} + a_{2\dot{2}}a^{2\dot{2}}\} = \frac{1}{2}\,a_{\lambda\dot{\mu}}a^{\lambda\dot{\mu}}.$$

Заметив, что $a_{1\dot{1}} = a_{\dot{1}1}$ и $a_{2\dot{2}} = a_{\dot{2}2}$ являются вещественными числами, а $a_{1\dot{2}} = a_{\dot{2}1}$, $a_{2\dot{1}} = a_{\dot{1}2}$ комплексно-сопряженными, мы можем положить

$$\left.\begin{aligned} a_{1\dot{1}} &= ct + z, & a_{1\dot{2}} &= x + iy, \\ a_{2\dot{2}} &= ct - z, & a_{2\dot{1}} &= x - iy. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Пользуясь правилами для переходов к контравариантным компонентам, мы можем записать наряду с формулами (4.1)

$$\left.\begin{aligned} a^{\dot{1}1} &= a_{\dot{2}2} = ct - z, & a^{\dot{1}2} &= -a_{\dot{2}1} = -x - iy, \\ a^{\dot{2}2} &= a_{\dot{1}1} = ct + z, & a^{\dot{2}1} &= -a_{\dot{1}2} = -x + iy. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Для выражения $\frac{1}{2}a_{\lambda\dot{\mu}}a^{\lambda\dot{\mu}}$ в новых обозначениях получаем:

$$\frac{1}{2}a_{\lambda\dot{\mu}}a^{\lambda\dot{\mu}}=\begin{vmatrix} ct+z & x+iy \\ x-iy & ct-z \end{vmatrix}=c^2t^2-x^2-y^2-z^2.$$

Это выражение показывает, что при бинарной трансформации четыре величины

$$\left.\begin{aligned} ct&=\frac{1}{2}(a_{1\dot{1}}+a_{2\dot{2}}), & z&=\frac{1}{2}(a_{1\dot{1}}-a_{2\dot{2}}), \\ x&=\frac{1}{2}(a_{1\dot{2}}+a_{2\dot{1}}), & y&=\frac{1}{2i}(a_{1\dot{2}}-a_{2\dot{1}}) \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

преобразуются между собой линейно так, что остается инвариантной квадратичная форма

$$c^2t^2-x^2-y^2-z^2. \tag{4.4}$$

Такое линейное преобразование L

$$\begin{aligned} ct'&=l_{00}ct+l_{01}x+l_{02}y+l_{03}z, \\ x'&=l_{10}ct+l_{11}x+l_{12}y+l_{13}z, \\ y'&=l_{20}ct+l_{21}x+l_{22}y+l_{23}z \\ z'&=l_{30}ct+l_{31}x+l_{32}y+l_{33}z \end{aligned} \tag{4.3a}$$

с матрицей

$$\|L\|=\begin{vmatrix} l_{00} & l_{01} & l_{02} & l_{03} \\ . & . & . & . \\ l_{30} & . & . & l_{33} \end{vmatrix} \tag{4.5}$$

называется преобразованием Лоренца. Четырехкомпонентная величина a^i, которая трансформируется при помощи матрицы (4.5), называется контравариантным четырехмерным вектором

$$a^0\sim ct,\quad a^1\sim x,\quad a^2\sim y,\quad a^3\sim z.$$

Обозначая через a_i величины которых трансформируются как

$$a_0\sim ct,\quad a_1\sim -x,\quad a_2\sim -y,\quad a_3\sim -z,$$

мы вводим ковариантные компоненты вектора. Преобразование Лоренца оставляет инвариантным билинейную форму

$$a_0b^0+a_1b^1+a_2b^2+a_3b^3.$$

Определение четырехмерных тензоров T_{ik}, T_i^k и т. д. и правила перехода от ковариантных к контравариантным компонентам мы предполагаем известными читателю.

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ЛОРЕНЦА ПРИ ПОМОЩИ БИНАРНОЙ МАТРИЦЫ

Выразим коэфициенты матрицы Лоренца через коэфициент бинарного преобразования. Для этого, воспользовавшись формулой (4.3), выпишем характер трансформации координаты в новой системе отсчета

$$ct' \sim \frac{1}{2}(\xi_1' \dot{\xi}_1' + \xi_2' \dot{\xi}_2')$$

$$x' \sim \frac{1}{2}(\xi_1' \dot{\xi}_2' + \xi_2' \dot{\xi}_1')$$

$$y' \sim \frac{1}{2} i(\xi_1' \dot{\xi}_2' - \xi_2' \dot{\xi}_1')$$

$$z' \sim \frac{1}{2} (\xi_1' \dot{\xi}_1' - \xi_2' \dot{\xi}_2')$$

и подставим вместо ξ_λ и ξ_λ' их выражения через ξ_λ и $\dot{\xi}_\lambda$ по формулам (3.4) и 3.4*); мы получим:

$$ct' \sim \frac{1}{2}(\xi_1' \dot{\xi}_1' + \xi_2' \dot{\xi}_2') =$$

$$= \frac{1}{2}\{(\delta\xi_1 - \gamma\xi_2)(\delta^*\dot{\xi}_1 - \gamma^*\dot{\xi}_2) + (-\beta\xi_1 + \alpha\xi_2)(-\beta^*\dot{\xi}_1 + \alpha^*\dot{\xi}_2)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{(\delta\delta^* + \beta\beta^*)\xi_1\dot{\xi}_1 - (\gamma\delta^* + \alpha\beta^*)\xi_2\dot{\xi}_1 - (\delta\gamma^* + \beta\alpha^*)\xi_1\dot{\xi}_2 + (\gamma\gamma^* + \alpha\alpha^*)\xi_2\dot{\xi}_2\}$$

$$\sim \frac{1}{2}\{(\delta\delta^* + \beta\beta^*)(ct + z) - (\gamma\delta^* + \alpha\beta^*)(x - iy) - (\delta\gamma^* + \beta\alpha^*)(x + iy) +$$
$$+ (\gamma\gamma^* + \alpha\alpha^*)(ct - z)\} =$$

$$= (\delta\delta^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^* + \alpha\alpha^*)\, ct - (\gamma\delta^* + \alpha\beta^* + \delta\gamma^* + \beta\alpha^*)\, x +$$
$$+ i(\gamma\delta^* + \alpha\beta^* - \delta\gamma^* - \beta\alpha^*)\, y + (\delta\delta^* + \beta\beta^* - \gamma\gamma^* - \alpha\alpha^*)\, z,$$

$$x' \sim \frac{1}{2}(\xi_1'\dot{\xi}_2' + \xi_2'\dot{\xi}_1') =$$

$$= \frac{1}{2}\{(\delta\xi_1 - \gamma\xi_2)(-\beta^*\dot{\xi}_1 + \alpha^*\dot{\xi}_2) + (-\beta\xi_1 + \alpha\xi_2)(\delta^*\dot{\xi}_1 - \gamma^*\dot{\xi}_2)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{(-\delta\beta^* - \beta\delta^*)\xi_1\dot{\xi}_1 + (\gamma\beta^* + \alpha\delta^*)\xi_2\dot{\xi}_1 + (\delta\alpha^* + \beta\gamma^*)\xi_1\dot{\xi}_2 -$$
$$- (\gamma\alpha^* + \alpha\gamma^*)\xi_2\dot{\xi}_2\} \sim$$

$$\sim \frac{1}{2}\{(-\delta\beta^* - \beta\delta^*)(ct+z) + (\gamma\beta^* + \alpha\delta^*)(x-iy) +$$
$$+ (\delta\alpha^* + \beta\gamma^*)(x+iy) - (\gamma\alpha^* + \alpha\gamma^*)(ct-z)\} =$$

$$= -(\delta\beta^* + \beta\delta^* + \gamma\alpha^* + \alpha\gamma^*)\,ct + (\gamma\beta^* + \delta^*\alpha + \delta\alpha^* + \beta\gamma^*)\,x +$$
$$+ i(\delta\alpha^* + \beta\gamma^* - \gamma\beta^* - \alpha\delta^*)\,y + (\gamma\alpha^* + \alpha\gamma^* - \delta\beta^* - \beta\delta^*)\,z,$$

$$y' \sim \frac{1}{2i}(\xi_1'\xi_{\dot 2}' - \xi_2'\xi_{\dot 1}') =$$

$$= \frac{1}{2i}\{(\delta\xi_1 - \gamma\xi_2)(-\beta^*\xi_{\dot 1} + \alpha^*\xi_{\dot 2}) - (-\beta\xi_1 + \alpha\xi_2)(\delta^*\xi_{\dot 1} - \gamma^*\xi_{\dot 2})\} =$$
$$= \frac{1}{2i}\{(-\delta\beta^* + \beta\delta^*)\xi_1\xi_{\dot 1} + (\gamma\beta^* - \alpha\delta^*)\xi_2\xi_{\dot 1} + (\delta\alpha^* - \beta\gamma^*)\xi_2\xi_{\dot 2} +$$
$$+ (-\gamma\alpha^* + \alpha\gamma^*)\xi_2\xi_{\dot 2}\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\{(\beta\delta^* - \delta\beta^*)(ct+z) + (\gamma\beta^* - \alpha\delta^*)(x-iy) +$$
$$+ (\delta\alpha^* - \beta\gamma^*)(x+iy) + (\alpha\gamma^* - \gamma\alpha^*)(ct-z)\} =$$
$$= \frac{(\beta\delta^* - \delta\beta^* + \alpha\gamma^* - \gamma\alpha^*)\,ct}{i} + \frac{(\gamma\beta^* - \alpha\delta^* + \delta\alpha^* - \beta\gamma^*)\,x}{i} +$$
$$+ (\delta\alpha^* - \beta\gamma^* - \gamma\beta^* + \alpha\delta^*)\,y + \frac{(\beta\delta^* - \delta\beta^* - \alpha\gamma^* + \gamma\alpha^*)\,z}{i}.$$

$$z' = \frac{1}{2}(\xi_1'\xi_{\dot 2}' - \xi_2'\xi_{\dot 1}') \sim$$

$$\sim \frac{1}{2}\{(\delta\xi_1 - \gamma\xi_2)(\delta^*\xi_{\dot 1} - \gamma^*\xi_{\dot 2}) - (-\beta\xi_1 + \alpha\xi_2)(-\beta^*\xi_{\dot 1} + \alpha^*\xi_{\dot 2})\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{(\delta\delta^* - \beta\beta^*)\xi_1\xi_{\dot 1} + (-\delta\gamma^* + \beta\alpha^*)\xi_1\xi_{\dot 2} + (-\gamma\delta^* + \alpha\beta^*)\xi_2\xi_{\dot 1} + (\gamma\gamma^* - \alpha\alpha^*)\xi_2\xi_{\dot 2}\} \sim$$
$$\sim \frac{1}{2}\{(\delta\delta^* - \beta\beta^*)(ct+z) + (\beta\alpha^* - \delta\gamma^*)(x+iy) +$$
$$+ (\alpha\beta^* - \gamma\delta^*)(x-iy) + (\gamma\gamma^* - \alpha\alpha^*)(ct-z)\} \sim$$
$$\sim (\delta\delta^* - \beta\beta^* + \gamma\gamma^* - \alpha\alpha^*)\,ct + (\beta\alpha^* - \delta\gamma^* + \alpha\beta^* - \gamma\delta^*)\,x +$$
$$+ i(\beta\alpha^* - \delta\gamma^* - \alpha\beta^* + \gamma\delta^*)\,y + (\delta\delta^* - \beta\beta^* - \gamma\gamma^* + \alpha\alpha^*)\,z.$$

Матрица Лоренца выразится через параметры α, β, γ, δ следующим образом:

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{2}(\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^* + \delta\delta^*), & -\frac{1}{2}(\alpha\beta^* + \beta\alpha^* + \gamma\delta^* + \delta\gamma^*), & \frac{i}{2}(\alpha\beta^* - \beta\alpha^* + \gamma\delta^* - \delta\gamma^*), & -\frac{1}{2}(\alpha\alpha^* - \beta\beta^* + \gamma\gamma^* - \delta\delta^*), \\
-\frac{1}{2}(\alpha\gamma^* + \gamma\alpha^* + \beta\delta^* + \delta\beta^*), & \frac{1}{2}(\alpha\delta^* + \delta\alpha^* + \gamma\beta^* + \beta\gamma^*), & -\frac{i}{2}(\alpha\delta^* - \delta\alpha^* + \gamma\beta^* - \beta\gamma^*), & \frac{1}{2}(\alpha\gamma^* + \gamma\alpha^* - \beta\delta^* - \delta\beta^*), \\
-\frac{i}{2}(\alpha\gamma^* - \gamma\alpha^* + \beta\delta^* - \delta\beta^*), & \frac{i}{2}(\alpha\delta^* - \delta\alpha^* + \beta\gamma^* - \gamma\beta^*), & \frac{1}{2}(\alpha\delta^* + \delta\alpha^* - \beta\gamma^* - \gamma\beta^*), & \frac{i}{2}(\alpha\gamma^* - \gamma\alpha^* + \delta\beta^* - \beta\delta^*), \\
-\frac{1}{2}(\alpha\alpha^* + \beta\beta^* - \gamma\gamma^* - \delta\delta^*), & \frac{1}{2}(\alpha\beta^* + \beta\alpha^* - \gamma\delta^* - \delta\gamma^*), & -\frac{i}{2}(\alpha\beta^* - \beta\alpha^* - \gamma\delta^* + \delta\gamma^*), & -\frac{1}{2}(\alpha\alpha^* - \beta\beta^* - \gamma\gamma^* + \delta\delta^*).
\end{array}$$

Как легко видеть, все коэфициенты матрицы Лоренца вещественные и выражены через четыре комплексных параметра α, β, γ, δ, связанных условием:

$$(\alpha\delta - \gamma\beta) = 1. \tag{4.6}$$

Число вещественных параметров, следовательно, равно шести; давая этим шести параметрам все возможные значения, мы получим все преобразования Лоренца.

Проведенное нами исследование показывает, что:

1. Группа Лоренца является однозначным представлением бинарной группы, эквивалентным неприводимому представлению D_{22}.

2. Каждому преобразованию Лоренца L соответствует два бинарных преобразования, определяемых матрицами:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad -\sigma = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}.$$

Бинарная группа является, следовательно, двузначным представлением группы Лоренца.

3. Рассмотренные нами неприводимые представления бинарной группы $D_{vv'}(\sigma)$ являются одновременно и представлениями группы Лоренца, причем в случае четной суммы $v + v'$ — однозначными представлениями и в случае нечетной суммы $v + v'$ — двузначными представлениями группы Лоренца.

ПОДГРУППА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВРАЩЕНИЙ

Рассмотрим ту подгруппу преобразований Лоренца, которые оставляют инвариантным время t и лишь трансформируют пространственные координаты x, y, z. Эта группа образует группу пространственных вращений.

Из условия $ct' = ct$ имеем:

$$\xi'_{1}\xi'_{\dot{1}} + \xi'_{2}\xi'_{\dot{2}} = \xi_{1}\xi_{\dot{1}} + \xi_{2}\xi_{\dot{2}}.$$

Сопоставляя этот инвариант с инвариантом $\xi_1\xi^1 + \xi_2\xi^2$, заключаем, что при бинарных трансформациях, представляющих группу вращения,

$$\xi_{\dot{1}} \sim \xi^1 \quad \text{и} \quad \xi_{\dot{2}} \sim \xi^2.$$

Переходя к матрицам соответствующих преобразований, имеем:

$$\sigma=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta^* & -\gamma^*\\ -\beta^* & \alpha^*\end{pmatrix}=\breve{\sigma}^*,$$

т. е.

$$\alpha^*=\delta,\quad \beta^*=-\gamma,\quad \gamma^*=-\beta,\quad \delta^*=\alpha.$$

Мы получаем, следовательно, пространственное вращение, если среди бинарных трансформаций ограничимся унитарными трансформациями.

Мы можем написать унитарную бинарную матрицу в общем виде следующим образом:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+i\mu & \nu+i\rho\\ -(\nu-i\rho) & \lambda-i\mu\end{pmatrix},$$

где λ, μ, ν, ρ — четыре вещественных параметра, удовлетворяющих условию:

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2=1.$$

Выразим матрицу Лоренца (4.6) для специального случая пространственных вращений через эти четыре параметра:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2+\rho^2-\nu^2-\mu^2 & 2(\mu\lambda-\nu\rho) & 2(\mu\rho+\lambda\nu)\\ 0 & -2(\mu\lambda+\nu\rho) & \lambda^2+\nu^2-\mu^2-\rho^2 & 2(\lambda\rho-\mu\nu)\\ 0 & 2(\mu\rho-\lambda\nu) & 2(\lambda\rho+\mu\nu) & \lambda^2+\mu^2-\nu^2-\rho^2\end{vmatrix}. \tag{4.7}$$

Четыре вещественных параметра λ, μ, ν, ρ, определяющие элементы этой матрицы, называются параметрами Кэли (Cayley).

Частные случаи.

1) Вращение вокруг оси z на угол φ.

Полагая

$$\lambda=\cos\frac{\varphi}{2},\quad \mu=\sin\frac{\varphi}{2},\quad \nu=0,\quad \rho=0,$$

получим:

$$x'=(\lambda^2-\mu^2)\,x+2\mu\lambda y=x\cos\varphi+y\sin\varphi,$$

$$y'=-2\mu\lambda x+(\lambda^2-\mu^2)\,y=-x\sin\varphi+y\cos\varphi.$$

2) Вращение вокруг оси y на угол θ.

Полагая

$$\lambda = \cos\frac{\theta}{2}, \quad \mu = 0,$$
$$\nu = \sin\frac{\theta}{2}, \quad \rho = 0,$$

получим:

$$x' = (\lambda^2 - \nu^2)\,x + 2\lambda\nu z = x\cos\theta + z\sin\theta,$$
$$z' = -2\lambda\nu x + (\lambda^2 - \nu^2)\,z = -x\sin\theta + z\cos\theta.$$

3) Вращение вокруг оси x на угол ψ.

Полагая

$$\lambda = \cos\frac{\psi}{2}, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0, \quad \rho = \sin\frac{\psi}{2},$$

получим:

$$y' = (\lambda^2 - \rho^2)\,y + 2\lambda\rho z = y\cos\psi + z\sin\psi,$$
$$z' = -2\lambda\rho y + (\lambda^2 - \rho^2)\,z = y\sin\psi + z\cos\psi.$$

Рассмотрение этих трех частных случаев дает непосредственно геометрическое значение четырех параметров:

1) $\qquad \lambda = \cos\frac{\vartheta}{2},$

где ϑ — угол, на который вращается система координат при вращении $(\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \rho)$,

2) $\qquad \mu = \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\chi_1,$

3) $\qquad \nu = \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\chi_2,$

4) $\qquad \rho = \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\chi_3,$

где χ_1, χ_2, χ_3 — углы, образуемые осью вращения с осями координат.

Таким образом мы установили вид матрицы бинарной трансформации для любого пространственного вращения системы координат.

ПОДГРУППА РАВНОМЕРНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Специализируем теперь бинарную трансформацию так, чтобы соответствующая трансформация Лоренца представляла переход к новой системе отсчета, двигающейся по отношению к старой со скоростью, характеризуемой по величине и направлению вектором $\mathbf{v}$.

Рассмотрим бинарную трансформацию, определяемую матрицей

$$\sigma = \begin{pmatrix} \lambda + \mu & \nu + i\rho \\ \nu - i\rho & \lambda - \mu \end{pmatrix},$$

где λ, μ, ν, ρ — четыре вещественных параметра, удовлетворяющих условию:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu & \nu + i\rho \\ \nu - i\rho & \lambda - \mu \end{vmatrix} = \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 - \rho^2 = 1.$$

Выразим матрицу Лоренца, представляющую эту бинарную трансформацию, через эти четыре параметра:

$$L = \begin{pmatrix} \lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2 & 2\lambda\nu & 2\lambda\rho & 2\lambda\mu \\ 2\nu\lambda & \lambda^2-\mu^2+\nu^2-\rho^2 & 2\nu\rho & 2\nu\mu \\ 2\rho\lambda & 2\rho\nu & \lambda^2-\mu^2-\nu^2+\rho^2 & 2\rho\mu \\ 2\mu\lambda & 2\mu\nu & 2\mu\rho & \lambda^2+\mu^2-\nu^2-\rho^2 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Частные случаи.

1) Движение вдоль оси z со скоростью v_z.

Полагая

$$\lambda = \operatorname{ch}\frac{\varphi}{2}, \quad \mu = \operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}, \quad \nu = 0, \quad \rho = 0, \quad v_z = c \operatorname{th}\varphi,$$

получим:

$$ct' = (\lambda^2 + \mu^2)\, ct + 2\lambda\mu z = ct \operatorname{ch}\varphi + z \operatorname{sh}\varphi,$$

$$z' = 2\lambda\mu\, ct + (\lambda^2 + \mu^2)\, z = ct \operatorname{sh}\varphi + z \operatorname{ch}\varphi.$$

2) Движение вдоль оси x со скоростью v_x.

Полагая

$$\lambda = \operatorname{ch}\frac{\theta}{2}, \quad \mu = 0, \quad \nu = \operatorname{sh}\frac{\theta}{2}, \quad \rho = 0, \quad v_x = c \operatorname{th}\theta,$$

получим:

$$ct' = (\lambda^2 + \nu^2)\, ct + 2\lambda\nu x = ct \operatorname{ch}\theta + x \operatorname{sh}\theta,$$
$$x' = 2\lambda\nu\, ct + (\lambda^2 + \nu^2)\, x = ct \operatorname{sh}\theta + x \operatorname{ch}\theta.$$

3) Движение вдоль оси y со скоростью v_y.

Полагая

$$\lambda = \operatorname{ch}\frac{\psi}{2}, \quad \mu = 0, \quad \nu = 0, \quad \rho = \operatorname{sh}\frac{\psi}{2}, \quad v_y = c \operatorname{th}\psi,$$

получим:

$$ct' = (\lambda^2 + \rho^2)\, ct + 2\lambda\rho y = ct \operatorname{ch}\psi + y \operatorname{sh}\psi,$$
$$y' = 2\lambda\rho\, ct + (\lambda^2 + \rho^2)\, y = ct \operatorname{sh}\psi + y \operatorname{ch}\psi.$$

Рассмотрение этих трех частных случаев дает непосредственно кинематическое значение четырех параметров:

1) $\lambda = \operatorname{ch}\dfrac{\vartheta}{2}$,

где $|v| = c \operatorname{th}\vartheta$,

2) $\mu = \operatorname{sh}\dfrac{\vartheta}{2}\cos\chi_1$,

3) $\nu = \operatorname{sh}\dfrac{\vartheta}{2}\cos\chi_2$,

4) $\rho = \operatorname{sh}\dfrac{\vartheta}{2}\cos\chi_3$,

где χ_1, χ_2, χ_3 — углы, образуемые вектором $\mathbf{v}$ с осями координат.

Таким образом мы установили вид матрицы бинарной трансформации для случая прямолинейного движения системы отсчета.

Заметим, что в матрице Лоренца элемент L_{00}

$$L_{00} = \alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \gamma\gamma^* + \delta\delta^*$$

существенно положительная величина. Поэтому мы получаем лишь те преобразования Лоренца, которые не меняют направления времени. Если рассматривать группу Лоренца как представление бинарной группы, то это ограничение появляется само собой. Если же, как это делалось раньше при изложении принципа относительности, например у Минковского, исходить из группы Лоренца, то ограничение $L_{00} > 0$ приходилось вводить как дополнительное, отдельное условие.

ГРУППА ЛОРЕНЦА И ЗЕРКАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Принцип относительности требует, чтобы диференциальные уравнения, формулирующие законы природы, были инвариантны при преобразованиях Лоренца, не изменяющих направления времени. Не менее важным требованием к уравнениям, выражающим законы природы, является требование инвариантности уравнений при переходе от правой системы декартовых координат к левой, получаемой путем перехода от

$$x \to -x, \quad y \to -y, \quad z \to -z.$$

Эту операцию называют отображением в начале координат, и свойства уравнения оставаться инвариантным при этой замене называют *инвариантностью при зеркальном отображении* (Spiegelungsinvariant).

Например, утверждение, что магнитное и электрическое поле направлено в одну и ту же сторону, не обладает этой инвариантностью. Если в правой системе координат оба направления совпадают, то в левой они будут противоположны.

Если мы назовем совокупность всех преобразований Лоренца, не меняющих направления времени, плюс преобразование зеркального отражения, полной группой Лоренца, то от уравнений математической физики надо требовать инвариантность при преобразованиях полной группы.

Присмотревшись к формулам (4.1) и (4.2) мы замечаем, что переходу от x, y, z к $-x$, $-y$, $-z$ в спинорах соответствует переход к контраградиентно-сопряженным компонентам по формуле

$$\xi_\lambda \to \xi^{\dot\lambda}; \quad \eta^\lambda \to \eta_{\dot\lambda}.$$

Как мы видим, операции зеркального отображения в бинарной группе не соответствует линейное преобразование, и мы, следовательно, не в состоянии представлять полную группу Лоренца при помощи бинарных трансформаций.

Для того чтобы представить полную группу Лоренца при помощи линейных преобразований, поступим следующим образом.

Образуем четырехкомпонентную величину, которую назовем биспинором и компоненты которой обозначим через ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4. Пусть при бинарной трансформации первые две компоненты трансформируются как

$$\psi_1 \sim \xi^1, \quad \psi_2 \sim \xi^2,$$

а вторые две компоненты — как

$$\psi_3 \sim \xi_{\dot{1}}, \quad \psi_4 \sim \xi_{\dot{2}}.$$

При бинарной трансформации $\sigma\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ компоненты биспинора трансформируются при помощи четырехрядной матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^* & -\gamma^* \\ 0 & 0 & -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Операция отражения выразится в компонентах биспинора следующим образом:

$$\psi'_1 = \psi_3, \quad \psi'_2 = \psi_4,$$

$$\psi'_3 = \psi_1, \quad \psi'_4 = \psi_2,$$

т. е при помощи матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Система четырехрядных матриц (4.9) и (4.10) дает нам неприводимое представление полной группы Лоренца. Если мы ограничимся подгруппой простых преобразований Лоренца (исключим операцию отражения), система матриц распадается на две неприводимые системы двухрядных представлений.

Итак, мы получили следующие формулы для трансформации биспинора:

1) Пространственное вращение системы отсчета

$$\begin{pmatrix} \lambda+i\mu & \nu+i\rho & 0 & 0 \\ -\nu+i\rho & \lambda-i\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+i\mu & \nu+i\rho \\ 0 & 0 & -\nu+i\rho & \lambda-i\mu \end{pmatrix}$$

2) Равномерное движение системы отсчета

$$\begin{pmatrix} \lambda+\mu & \nu+i\rho & 0 & 0 \\ \nu-i\rho & \lambda-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\mu & -\nu-i\rho \\ 0 & 0 & -\nu+i\rho & \lambda+\mu \end{pmatrix}$$

3) Отражение в начале координат: матрица (4·10).

ГРУППА СЕДИНИОНОВ

Заметим, что все коэфициенты L_{ik} матрицы Лоренца являются эрмитовскими формами в четырех переменных α, β, γ, δ. Выпишем матрицы этих эрмитовских форм. Например:

$$\|L_{00}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \|L_{01}\| = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и т. д.}$$

Мы получим 16 матриц, которые мы в соответствии с коэфициентами матрицы Лоренца обозначим через E_{ik}. Все эти матрицы легко выражаются через следующие две системы матриц:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \quad (\sigma)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}; \quad \rho_1=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix};\\
&\rho_2=\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&-i\\i&0&0&0\\0&i&0&0\end{pmatrix}; \quad \rho_3=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \qquad (\rho)$$

при помощи формулы

$$E_{ik}=\sigma_i\rho_k.$$

Относительно этой системы матриц легко показать, что она обладает следующими свойствами:

1) Все матрицы σ_i перестановочны с матрицами системы ρ_k

$$\rho_i\sigma_k=\sigma_k\rho_i.$$

2) Матрица каждой из систем удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
\rho_1\rho_2&=i\rho_3, & \sigma_1\sigma_2&=i\sigma_3,\\
\rho_2\rho_3&=i\rho_1, & \sigma_2\sigma_3&=i\sigma_1,\\
\rho_3\rho_1&=i\rho_2, & \sigma_3\sigma_1&=i\sigma_2.
\end{aligned}$$

Это соотношение показывает, что каждая из систем матриц σ_i и ρ_k эквивалентна базисным матрицам s_i системы кватернионов, и мы можем записать кватернион Q в трех формах:

$$\begin{aligned}
Q&=a_0s_0+s_1a_1+s_2a_2+s_3a_3,\\
Q&=a_0\sigma_0+\sigma_1a_1+\sigma_2a_2+\sigma_3a_3,\\
Q&=a_0\rho_0+\rho_1a_1+\rho_2a_2+\rho_3a_3.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись этим, мы найдем удобный способ изучать группу сединионов.

Базисными матрицами в 16-мерном векторном пространстве будут 16 матриц E_{ik}, которые мы расположим в квадратную систему:

$$\begin{pmatrix} E_{00} & E_{01} & E_{02} & E_{03} \\ E_{10} & E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{20} & E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{30} & E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0\rho_0 & \sigma_0\rho_1 & \sigma_0\rho_2 & \sigma_0\rho_3 \\ \sigma_1\rho_0 & \sigma_1\rho_1 & \sigma_1\rho_2 & \sigma_1\rho_3 \\ \sigma_2\rho_0 & \sigma_2\rho_1 & \sigma_2\rho_2 & \sigma_2\rho_3 \\ \sigma_3\rho_0 & \sigma_3\rho_1 & \sigma_3\rho_2 & \sigma_3\rho_3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему гиперкомплексных чисел $S = (a_1 \ldots a_{16})$

$$S = a_1 E_{00} + a_2 E_{01} + \ldots + a_{16} E_{33}.$$

Мы можем каждый из сединионов записать в виде:

$$S = \rho_0 A + \rho_1 B + \rho_2 C + \rho_3 D,$$

где

$$\begin{aligned} A &= a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3, \\ B &= b_0\sigma_0 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3, \\ C &= c_0\sigma_0 + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3, \\ D &= d_0\sigma_0 + d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\sigma_3 \end{aligned}$$

— обычные кватернионы. Так как $\rho_i\sigma_k = \sigma_k\rho_i$, то матрицы A,B,C,D перестановочны с матрицами ρ_k, и мы можем также писать:

$$S = A\rho_0 + B\rho_1 + C\rho_2 + D\rho_3.$$

Число $\tilde{S} = \{\tilde{A}, -\tilde{B}, -\tilde{C}, -\tilde{D}\}$ называется сопряженным числу $S = \{A, B, C, D\}$. Вычислим произведение $S\tilde{S} = \tilde{S}S$. Имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{S}S = A\tilde{A} - B\tilde{B} - C\tilde{C} - D\tilde{D} = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 &- \\ - b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &- \\ - c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &- \\ - d_0^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2&. \end{aligned}$$

СПЕЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

В заключение сопоставим в таблице формулы, связывающие компоненты четырехмерного вектора с компонентами спинтензора

$a_{1\dot{1}} \sim a^0 + a^3$	$a_{1\dot{2}} \sim a^1 + ia^2$	$a^{\dot{1}1} \sim a^0 - a^3$	$a^{\dot{1}2} \sim -a^1 - ia^2$
$a_{2\dot{1}} \sim a^1 - ia^2$	$a_{2\dot{2}} \sim a^0 - a^3$	$a^{\dot{2}1} \sim -a^1 + ia^3$	$a^{\dot{2}2} \sim a^0 + a^3$
$a_{1\dot{1}} \sim a_0 - a_3$	$a_{1\dot{2}} \sim -a_1 - ia_2$	$a^{\dot{1}1} \sim a_0 + a_3$	$a^{\dot{1}2} \sim a_1 + ia_2$
$a_{2\dot{1}} \sim -a_1 + ia_2$	$a_{2\dot{2}} \sim a_0 + a_3$	$a^{\dot{2}1} \sim -a_1 - ia_2$	$a^{\dot{2}2} \sim a^0 - a^3$

и решим необходимую нам для дальнейших приложений следующую основную задачу:

Найти 16-линейные комбинации из 16 компонент тензора второго ранга T^{ik}, которые трансформировались бы по неприводимым представлениям групп Лоренца. Запишем $T^{ik} \sim x^i y^k$ и перейдем от векторов x^i и y^k к спинтензорам $a_{\lambda\dot{\mu}}$ и $b_{\sigma\dot{\rho}}$.

На стр. 34 мы уже решили аналогичную задачу для спинтензора $a_{\lambda\dot{\mu}} b_{\sigma\dot{\rho}}$, соответствующего тензору T_{ik}. Мы можем воспользоваться готовыми формулами и перейти от спиноров к обычным векторам.

По D_{22} трансформируются девять величин:

$$\begin{matrix} c_{11\dot{1}\dot{1}} & c_{12\dot{1}\dot{1}} & c_{22\dot{1}\dot{1}} \\ c_{11\dot{1}\dot{2}} & c_{12\dot{1}\dot{2}} & c_{22\dot{1}\dot{2}} \\ c_{11\dot{2}\dot{2}} & c_{12\dot{2}\dot{2}} & c_{22\dot{2}\dot{2}}. \end{matrix} \tag{4.11}$$

Подставляя вместо спинтензоров их векторные выражения, получим:

$$c_{11\dot{1}\dot{1}} \sim 4\,(x^0 + x^3)(y^0 + y^3),$$

$$c_{11\dot{1}\dot{2}} \sim 2\,\{(x^0 + x^3)(y^1 + iy^2) + (x^1 + ix^2)(y^0 + y^3)\},$$

$$c_{11\dot{2}\dot{2}} \sim 4\,(x^1 + ix^2)(y^1 + iy^2),$$

$$c_{12\dot{1}\dot{1}} \sim 2\,\{(x^0 + x^3)(y^1 - iy^2) + (x^1 - ix^2)(y^0 + y^3)\},$$

$$c_{12\dot{1}\dot{2}} \sim (x^0 + x^3)(y^0 - y^3) + (x^1 + ix^2)(y^1 + iy^2) + \\ + (x^1 - ix^2)(y^1 + iy^2) + (x^0 - x^3)(y^0 + y^3),$$

$$c_{12\dot{2}\dot{2}} \sim 2\,\{(x^1 + ix^2)(y^0 - y^3) + (x^0 - x^3)(y^1 + iy^2),$$

$$c_{22\dot{1}\dot{1}} \sim 4\,\{(x^1 - ix^2)(y^1 - iy^2)\},$$

$$c_{22\dot{1}\dot{2}} \sim 2\,\{(T^{10} + T^{01} - T^{13} - T^{31}) - i\,(T^{20} + T^{02} - T^{23} - T^{32})\}$$

$$c_{22\dot{2}\dot{2}} \sim 4\,(x^0 - x^3)(y^0 - y^3).$$

Перемножая эти выражения и переходя к тензору T_{ik}, получим:

$$\begin{aligned}
c_{11\dot1\dot1} &\sim 4\{T^{00}+T^{30}+T^{03}+T^{33}\},\\
c_{11\dot1\dot2} &\sim 2\{(T^{01}+T^{31}+T^{10}+T^{13})+i(T^{02}+T^{20}+T^{32}+T^{23})\},\\
c_{11\dot2\dot2} &\sim 4\{(T^{11}-T^{22})+i(T^{21}+T^{12})\},\\
c_{12\dot1\dot2} &\sim 2\{T^{00}+T^{11}+T^{22}-T^{33}\},\\
c_{12\dot2\dot2} &\sim 2\{(T^{10}+T^{01}-T^{13}-T^{31})+i(T^{20}+T^{02}-T^{23}-T^{32})\},\\
c_{22\dot2\dot2} &\sim 4\{T^{00}+T^{33}-T^{30}-T^{03}\}.
\end{aligned}$$

По $\boldsymbol{D}_{0,2}$ трансформируются три величины:

$$\left.\begin{aligned}
c_{\dot1\dot1} &\sim 2\{(x^1-ix^2)(y^0+y^3)-(x^0+x^3)(y^1-iy^2)\},\\
c_{\dot1\dot2} &\sim \{(x^1-ix^2)(y^1+iy^2)-(x^0+x^3)(y^0-x^3)+\\
&\quad+(x^0-x^3)(y+x^3)-(x^1+ix^2)(y^1-iy^2)\},\\
c_{\dot2\dot2} &\sim 2\{(x^0-x^3)(y^1+iy^2)-(x^1+ix^2)(y^0-y^3)\}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

Перемножая эти выражения и переходя к тензору T_{ik}, получим:

$$\left.\begin{aligned}
c_{\dot1\dot1} &\sim 2\{(T^{10}+T^{13}-T^{01}-T^{31})+i(-T^{20}-T^{23}+T^{02}+T^{32})\},\\
c_{\dot1\dot2} &\sim 2\{(T^{03}-T^{30})+i(T^{12}-T^{21})\},\\
c_{\dot2\dot2} &\sim 2\{(T^{01}-T^{31}-T^{10}+T^{13})+i(T^{02}-T^{32}-T^{20}-T^{23})\}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.12a}$$

Наконец, для инварианта c мы получаем:

$$\begin{aligned}
c \sim (x^0+x^3)(y^0-y^3)-(x^1-ix^2)(y^1+iy^2)+\\
+(x^0-x^3)(y^0+y^3)-(x^1+ix^2)(y^1-iy^2).
\end{aligned}$$

Перемножая эти выражения и переходя к тензору T^{ik}, получим:

$$c \sim 2(T^{00}-T^{11}-T^{22}-T^{33}) = 2(T^0_0+T^1_1+T^2_2+T^3_3).$$

Если тензор симметричный $T^{ik}=T^{ki}=S^{ik}$, то, как легко видеть, все линейные комбинации, трансформирующиеся по $\boldsymbol{D}_{2,0}$ и $\boldsymbol{D}_{0,2}$, тождественно равны нулю, и мы имеем лишь линейные комбинации, трансформирующиеся по $\boldsymbol{D}_{22}$ и $\boldsymbol{D}_{00}$.

$$\boldsymbol{D}_{22}\left\{\begin{aligned}
c_{11\dot1\dot1} &\sim 4\{S^{00}+S^{33}+2S^{03}\}\\
c_{11\dot1\dot2} &\sim 4\{(S^{01}+S^{13})+i(S^{02}+S^{32})\}\\
c_{11\dot2\dot2} &\sim 4\{(S^{11}-S^{22})+2iS^{12}\}\\
c_{12\dot2\dot2} &\sim 2\{S^{00}+S^{11}+S^{22}-S^{33}\}\\
c_{12\dot2\dot2} &\sim 4\{S^{10}-S^{13})+i(S^{20}-S^{23})\}\\
c_{22\dot2\dot2} &\sim 4(S^{00}+S^{33}-2S^{30})
\end{aligned}\right. \tag{4.13}$$

$$\boldsymbol{D}_{0,0} \qquad \{c \sim 2(S^{00}-S^{11}-S^{22}-S^{33})\}$$

Если же тензор антисимметричный $T^{ik} = -T^{ki} = A^{ik}$, то все линейные комбинации, трансформирующиеся по $\boldsymbol{D}_{2,2}$ и $\boldsymbol{D}_{0,0}$, равны нулю, и мы имеем:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\boldsymbol{D}_{0,2}\begin{cases}
c_{\dot1\dot1} \sim 4\,\{(A^{10} + A^{13}) + i\,(A^{02} + A^{32})\} \\
c_{\dot1\dot2} \sim 4\,\{A^{03} + iA^{12}\} \\
c_{\dot2\dot2} \sim 4\,\{(A^{01} + A^{13}) + i\,(A^{02} + A^{23})\}
\end{cases} \\[2ex]
&\boldsymbol{D}_{2,0}\begin{cases}
c_{11} \sim 4\,\{A^{10} + A^{13}) - i\,(A^{02} + A^{32})\} \\
c_{12} \sim 4\,\{A^{03} + iA^{12}\} \\
c_{22} \sim 4\,\{(A^{01} + A^{13}) - i\,(A^{02} + A^{23})\}.
\end{cases}
\end{aligned}
\right\} \qquad (4.14)
$$

ГЛАВА ПЯТАЯ

СПИНОРНЫЙ АНАЛИЗ

Перейдем теперь к исследованию систем линейных диференциальных уравнений, определяющих величины спинорного типа, которые остаются инвариантными при бинарных преобразованиях.

С этой целью рассмотрим четырехмерный диференциальный оператор градиента с компонентами

$$\frac{\partial}{c\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x^0}, \quad \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x^3}$$

и сопоставим ему спинорный оператор. Так как градиент является ковариантным вектором, то переход определится следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \partial_{1\dot{1}} &= \frac{\partial}{c\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}, & \partial_{1\dot{2}} &= -\left(\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \\ \partial_{2\dot{1}} &= -\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), & \partial_{2\dot{2}} &= \frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

С помощью этого оператора мы можем образовывать диференциальные выражения, инвариантные при бинарных преобразованиях, например:

$$\partial_{\lambda\dot{\mu}}\xi^{\dot{\mu}}, \quad \partial_{\lambda\dot{\mu}}a^{\sigma\dot{\mu}}, \quad \partial_{\lambda\dot{\mu}}b^{\dot{\mu}\sigma}$$

и т. д.

Специально мы можем образовывать инвариантные выражения вида:

$$\frac{\partial a^i}{\partial x^i}, \quad \Box\varphi = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{12}} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi.$$

В самом деле, сопоставляя вектору $\mathbf{a}^i$ спинтензор $a_{\lambda\dot{\mu}}$ и вектору $\frac{\partial}{\partial x^i}$ спинтензор $\partial_{\lambda\dot{\mu}}$, мы имеем:

$$\partial_{\lambda\dot{\mu}} a^{\lambda\dot{\mu}} = \partial_{1\dot{1}} a^{1\dot{1}} + \partial_{1\dot{2}} a^{1\dot{2}} + \partial_{2\dot{1}} a^{2\dot{1}} + \partial_{2\dot{2}} a^{2\dot{2}} =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^3}\right)(a^0 - a^3) + \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)(a^1 - ia^2) +$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)(a^1 + ia^2) + \left(\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^3}\right)(a^0 + a^3) =$$
$$= 2\left(\frac{\partial a^0}{\partial x^0} + \frac{\partial a^1}{\partial x^1} + \frac{\partial a^2}{\partial x^2} + \frac{\partial a^3}{\partial x^3}\right)$$

или окончательно:

$$\frac{1}{2}\partial_{\lambda\dot{\mu}} a^{\lambda\dot{\mu}} = \frac{\partial a^k}{\partial x^k}. \tag{5.2}$$

Аналогично найдем: для оператора $\square$ (четырехмерный оператор Лапласа)

$$\frac{1}{2}\partial_{\lambda\dot{\mu}}\partial^{\lambda\dot{\mu}} = \square = \left\{\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}. \tag{5.3}$$

В качестве наиболее важных примеров применения спинорного анализа рассмотрим уравнения Максвелла и Дирака.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Нашей целью является показать, что система величин и уравнений, определяющих согласно теории Максвелла электромагнитное поле, может быть записана в спинорной форме. Для этого прежде всего напомним основные уравнения электромагнитного поля в их обычной векторной и тензорной записи.

Система линейных диференциальных уравнений Максвелла определяет шесть компонент напряженности электромагнитного поля

$$E_x,\ E_y,\ E_z,\ H_x,\ H_y,\ H_z$$

при заданном распределении плотности зарядов ρ и токов $\mathbf{j}$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_x,\\
&\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_y,\\
&\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j_z,\\
&\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}\ (5.4)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial y}+\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}=0,\\
&\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}=0,\\
&\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}=0,\\
&\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad \text{(II) (5.4)}$$

Мы можем записать эту систему уравнений в сокращенной векторной форме, воспользовавшись операциями rot и div

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}&=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\\
\operatorname{div}\mathbf{E}&=4\pi\rho,
\end{aligned}\right\}\ (5.4)\qquad
\left.\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}&=0,\\
\operatorname{div}\mathbf{H}&=0.
\end{aligned}\right\}\ (5.4)$$

Обозначая через T_{xx}, $T_{xy}, \ldots$ компоненты тензора Максвелла

$$\left.\begin{aligned}
T_{xx}&=\frac{1}{2}(E_x^2-E_y^2-E_z^2)+\frac{1}{2}(H_x^2-H_y^2-H_z^2),\\
T_{xy}&=E_xE_y+H_xH_y,\\
T_{xz}&=E_xE_z+H_xH_z,\\
T_{yy}&=\frac{1}{2}(E_y^2-E_x^2-E_z^2)+\frac{1}{2}(H_y^2-H_x^2-H_z^2),\\
T_{yz}&=E_yE_z+H_yH_z,\\
T_{zz}&=\frac{1}{2}(E_z^2-E_x^2-E_y^2)+\frac{1}{2}(H_z^2-H_y^2-H_x^2),
\end{aligned}\right\}\qquad (5.5)$$

через T_x, T_y, T_z — компоненты вектора Пойнтинга

$$T_x=\frac{c}{4\pi}(E_yH_z-E_zH_y),\qquad T_y=\frac{c}{4\pi}(E_zH_x-E_xH_z),$$
$$T_z=\frac{c}{4\pi}(E_xH_y-E_yH_x)$$

и через T — плотность энергии

$$T=\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)=(E_x^2+E_y^2+E_z^2+H_x^2+H_y^2+H_z^2),$$

мы получаем как следствие системы уравнений Максвелла закон сохранения энергии:

$$-\frac{\partial T}{c\partial t}=\frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial T_y}{\partial y}+\frac{\partial T_z}{\partial z}+(\mathbf{j}\mathbf{E}),\qquad (5.6)$$

закон сохранения импульса:

$$
\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{c}\frac{\partial T_x}{\partial t} &= \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} + \rho E_x + [\mathbf{jH}]_x, \\
-\frac{1}{c}\frac{\partial T_y}{\partial t} &= \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} + \rho E_y + [\mathbf{jH}]_y, \\
-\frac{1}{c}\frac{\partial T_z}{\partial t} &= \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \rho E_z + [\mathbf{jH}]_z,
\end{aligned}\right\} \tag{5.7}
$$

закон сохранения электрического заряда:

$$
-\frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{j}. \tag{5.8}
$$

Для того чтобы усмотреть инвариантность уравнений Максвелла при преобразовании Лоренца, мы можем, следуя Минковскому, переписать их в четырехмерной тензорной форме.

Обозначим координаты x, y, z и время ct через

$$
x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^0,
$$

компоненты тока $\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ и плотность $4\pi\rho$ через

$$
s^1\ s^2\ s^3\ s^0.
$$

Введем антисимметричный контравариантный тензор второго ранга F^{ik}, компоненты которого определены схемой:

$$
F^{ik} = \begin{array}{c|cccc|}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
0 & 0 & E_x & E_y & E_z \\
1 & -E_x & 0 & -H_z & H_y \\
2 & -E_y & H_z & 0 & -H_x \\
3 & -E_z & -H_y & H_x & 0
\end{array} \tag{5.9}
$$

$$
E = (F^{01},\ F^{02},\ F^{03}) \text{ или } H = (F^{32},\ F^{13},\ F^{21}).
$$

Переходя от контравариантных компонент к ковариантным компонентам, мы получим:

$$
F_{ik} = \begin{array}{c|cccc|}
 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
0 & 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\
1 & E_x & 0 & -H_z & H_y \\
2 & E_y & H_z & 0 & -H_x \\
3 & E_z & -H_y & H_x & 0
\end{array}
$$

$$
E = (F_{10},\ F_{20},\ F_{30}) \text{ или } H = (F_{32},\ F_{13},\ F_{21})
$$

В этих обозначениях система уравнений Максвелла перепишется в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l}
* \quad \dfrac{\partial F^{01}}{\partial x^1}+\dfrac{\partial F^{02}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial F^{03}}{\partial x^3}=s^0,\\
\text{(I)}\ \dfrac{\partial F^{10}}{\partial x^0}+\ *\ +\dfrac{\partial F^{12}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial F^{13}}{\partial x^3}=s^1,\\
\dfrac{\partial F^{20}}{\partial x^0}+\dfrac{\partial F^{21}}{\partial x^1}+\ *\ +\dfrac{\partial F^{23}}{\partial x^3}=s^2,\\
\dfrac{\partial F^{30}}{\partial x^0}+\dfrac{\partial F^{31}}{\partial x^1}+\dfrac{\partial F^{32}}{\partial x^2}+\ *\ =s^3,\\
* \quad \dfrac{\partial F_{32}}{\partial x^1}+\dfrac{\partial F_{13}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial F_{21}}{\partial x^3}=0,\\
\text{(II)}\ \dfrac{\partial F_{32}}{\partial x^0}+\ *\ +\dfrac{\partial F_{03}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial F_{20}}{\partial x^3}=0,\\
\dfrac{\partial F_{13}}{\partial x^0}+\dfrac{\partial F_{30}}{\partial x^1}+\ *\ +\dfrac{\partial F_{01}}{\partial x^3}=0,\\
\dfrac{\partial F_{21}}{\partial x^0}+\dfrac{\partial F_{02}}{\partial x^1}+\dfrac{\partial F_{10}}{\partial x^2}+\ *\ =0.
\end{array}\right\} \qquad (5.4\text{a})$$

В сокращенной тензорной форме эта система может быть записана так:

$$\text{I}\ \ \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}=s^i; \qquad \text{II}\ \ \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}=0.$$

Для интегрирования диференциальных уравнений Максвелла удобно ввести в качестве вспомогательных величин скалярный и векторные потенциалы φ и $\mathbf{A}$, через которые выражаются напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ электромагнитного поля

$$\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \qquad (5.10)$$

Подставляя эти выражения для $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ в уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H}=0,$$

мы замечаем, что они тождественно удовлетворяются. Подставляя их в уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho,$$

мы получим для φ и $\mathbf{A}$ следующие уравнения второго порядка:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=4\pi\rho,$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial z^2}=4\pi\mathbf{j}.$$

В четырехмерной формулировке Минковского мы вводим обозначения:

$$\varphi=\varphi_0,\quad A_x=\varphi^1,\quad A_y=\varphi^2,\quad A_z=\varphi^3,$$
$$\varphi=\varphi_0,\quad A_x=-\varphi_1,\quad A_y=-\varphi_2,\quad A_z=-\varphi_3$$

и получаем для системы уравнений (5.10) в четырехмерном обозначении:

$$F_{ik}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^k}-\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^i}.$$

В четырехмерной формулировке Минковского тензор Максвелла T_{xx}, T_{xy}, вектор Пойнтинга T_x и скалярная плотность энергии T объединяются в четырехмерный симметричный тензор энергии импульса:

$$T_x=T_{x0}=T_{0x},$$
$$T_y=T_{y0}=T_{0y},$$
$$T_z=T_{z0}=T_{0z},$$
$$T=T_{00}.$$

$$T^{ik}=\begin{pmatrix} T_{xx}, & T_{xy}, & T_{xz}, & T_{x0}\\ T_{yx}, & T_{yy}, & T_{yz}, & T_{y0}\\ T_{zx}, & T_{zy}, & T_{zz}, & T_{z0}\\ T_{0x}, & T_{0y}, & T_{0z}, & T_{00}\end{pmatrix},$$

где

$$T^{\lambda}_{\mu}=F^{\lambda}_{\sigma}F^{\sigma}_{\mu}-\frac{1}{4}\delta^{\lambda}_{\mu}F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho}. \qquad (5.5a)$$

Законы сохранения энергии и импульса формулируются следующим образом:

$$\frac{\partial T^{\mu}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}}=F_{\lambda\sigma}s^{\sigma}, \qquad (5.6a,\ 5.7a)$$

а закон сохранения электричества:

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^i}=0. \qquad (5.8a)$$

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В СПИНОРНОЙ ФОРМЕ

В предыдущей главе мы показали, что из шести компонент антисимметричного тензора $F^{ik}=-F^{ki}$ можно составить шесть линейных комбинаций:

$$f_{\lambda\mu}=f_{\mu\lambda},\quad f_{\mu\lambda}=\{f_{11},\ f_{12},\ f_{22}\},$$

$$f_{\dot\lambda\dot\mu}=f_{\dot\mu\dot\lambda},\quad f_{\dot\lambda\dot\mu}=\{f_{\dot1\dot1},\ f_{\dot1\dot2},\ f_{\dot2\dot2}\},$$

трансформирующихся при бинарных трансформациях по D_{20} и D_{02}. Мы можем прямо в формулу (3.18) главы III подставить выражения компонент электромагнитного поля

$$E=(F^{01},\ F^{02},\ F^{03}),\quad H=(F^{32},\ F^{13},\ F^{21})$$

и получить спинорные выражения для компонент электромагнитного поля

$$f_{11}=\{F^{10}+F^{13}\}+i\{F^{20}+F^{23}\}=\{F_{01}+F_{13}\}+i\{F_{02}+F_{23}\},$$

$$f_{12}=\{F^{03}+iF^{21}\}=\{F_{30}+iF_{21}\},$$

$$f_{22}=\{F^{01}+F^{13}\}+i\{F^{20}+F^{32}\}=\{F_{10}+F_{13}\}+i\{F_{02}+F_{32}\}.$$

Выражения для $f_{\dot\lambda\dot\mu}$ получаются из выражений для $f_{\lambda\mu}$ заменой i на $-i$.

Выразим теперь, воспользовавшись соотношением

$$F_{ik}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^i}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^k},$$

величины $f_{\lambda\mu}$ через производные от компонент вектора потенциала φ_i. Получим:

$$f_{11}=\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x^0}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x^1}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x^1}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x^3}\right\}+i\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial x^0}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x^2}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x^3}\right\},$$

$$f_{12}=\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial x^3}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x^0}\right\}+i\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x^1}\right\},$$

$$f_{22}=\left\{\frac{\partial\varphi_0}{\partial x^1}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x^0}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x^1}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x^3}\right\}+i\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial x^0}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x^3}-\frac{\partial\varphi_3}{\partial x^2}\right\}.$$

В выражениях для f_{11} и f_{22} легко перейти к спинорным величинам, если их переписать в следующем виде:

$$f_{11}=\left(\frac{\partial}{\partial x^0}-\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\varphi_1-\frac{\partial}{\partial x^1}(\varphi_0-\varphi_3)+i\left(\frac{\partial}{\partial x^0}-\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\varphi_2-i\frac{\partial}{\partial x^2}(\varphi_0-\varphi_3)=$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x^0}-\frac{\partial}{\partial x^3}\right)(\varphi_1+i\varphi_2)-\left(\frac{\partial}{\partial x^1}+i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)(\varphi_0-\varphi_3),$$

$$f_{22}=\frac{\partial}{\partial x^1}(\varphi_0+\varphi_3)-\left(\frac{\partial}{\partial x^0}+\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\varphi_1+i\left(\frac{\partial}{\partial x^0}+\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\varphi_2-i\frac{\partial}{\partial x^2}(\varphi_0+\varphi_3)=$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x^1}-i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)(\varphi_0+\varphi_3)-\left(\frac{\partial}{\partial x^0}+\frac{\partial}{\partial x^3}\right)(\varphi_1-i\varphi_2),$$

откуда получаем:

$$f_{11}=-\partial_{1\dot{1}}\,\varphi_{1\dot{2}}+\partial_{1\dot{2}}\,\varphi_{1\dot{1}}=\partial_{1\dot{1}}\,\varphi_1^{\dot{1}}+\partial_{1\dot{2}}\,\varphi_1^{\dot{2}}=\partial_{1\dot{\lambda}}\,\varphi_1^{\dot{\lambda}},$$
$$f_{22}=-\partial_{2\dot{1}}\,\varphi_{2\dot{2}}+\partial_{2\dot{2}}\,\varphi_{2\dot{1}}=\partial_{2\dot{1}}\,\varphi_2^{\dot{1}}+\partial_{2\dot{2}}\,\varphi_2^{\dot{2}}=\partial_{2\dot{\lambda}}\,\varphi_2^{\dot{\lambda}}.$$

Мы предоставляем читателю непосредственным вычислением проверить, что для f_{12} имеет место следующее выражение:

$$f_{12}=\frac{1}{2}\left\{\partial_{1\dot{1}}\,\varphi_2^{\dot{1}}+\partial_{1\dot{2}}\,\varphi_2^{\dot{2}}+\partial_{2\dot{1}}\,\varphi_1^{\dot{1}}+\partial_{2\dot{2}}\,\varphi_1^{\dot{2}}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\partial_{1\dot{\lambda}}\,\varphi_2^{\dot{\lambda}}+\partial_{2\dot{\lambda}}\,\varphi_1^{\dot{\lambda}}\right\}.$$

Мы получаем окончательно в спинорной форме соотношение (5.10) в виде:

$$f_{\lambda\mu}=\frac{1}{2}\left\{\partial_{\lambda\dot{\sigma}}\,\varphi_\mu^{\dot{\sigma}}+\partial_{\mu\dot{\sigma}}\,\varphi_\lambda^{\dot{\sigma}}\right\}.$$

В тензорной формулировке из

$$F_{ik}=\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^i}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x^k}$$

следует, что следующая система четырех уравнений тождественно равна нулю:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}=0.$$

Покажем, что в спинорной формулировке этой системе уравнений соответствует система

$$\partial_{\lambda\dot{\sigma}} f^{\dot{\sigma}}_{\dot{\mu}} - \partial_{\dot{\mu}\sigma} f^{\sigma}_{\lambda} = 0. \tag{5.11}$$

В самом деле, подставляя выражения для $f^{\dot{\sigma}}_{\dot{\mu}}$ и f^{σ}_{λ}, получим:

$$\partial_{\lambda\dot{\sigma}} (\partial_{\dot{\mu}\rho} \varphi^{\dot{\sigma}\rho} + \partial^{\dot{\sigma}}_{\rho} \varphi^{\rho}_{\dot{\mu}}) - \partial_{\dot{\mu}\sigma} (\partial_{\lambda\dot{\rho}} \varphi^{\sigma\dot{\rho}} + \partial^{\sigma}_{\dot{\rho}} \varphi^{\dot{\rho}}_{\lambda}) =$$

$$= (\partial_{\lambda\dot{\sigma}} \partial_{\dot{\mu}\rho} \varphi^{\dot{\sigma}\rho} - \partial_{\dot{\mu}\sigma} \partial_{\lambda\dot{\rho}} \varphi^{\sigma\dot{\rho}}) - (\partial_{\lambda\dot{\sigma}} \partial^{\dot{\sigma}}_{\rho} \varphi^{\rho}_{\dot{\mu}} - \partial_{\dot{\mu}\sigma} \partial^{\sigma}_{\dot{\rho}} \varphi^{\dot{\rho}}_{\lambda}).$$

Рассмотрим первую скобку. Меняя во втором члене обозначения $\dot{\sigma} \to \dot{\rho}$, $\dot{\rho} \to \dot{\sigma}$, мы замечаем, что скобка равна нулю. Путем непосредственного расчета убеждаемся, что и вторая скобка равна нулю.

Вторая система уравнений Максвелла запишется, следовательно, в спинорной форме следующим образом:

$$\partial_{\lambda\dot{\sigma}} f^{\dot{\sigma}}_{\dot{\mu}} - \partial_{\dot{\mu}\sigma} f^{\sigma}_{\lambda} = 0.$$

Для получения первой системы уравнений Максвелла

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = s^i$$

в спинорной форме воспользуемся несколько иным методом, чем в предыдущем случае, — методом, непосредственно вытекающим из самой сущности спинорного анализа.

Величины $f_{\lambda\mu}$ и $f_{\dot{\lambda}\dot{\mu}}$ трансформируются по $D_{2,0}$ и $D_{0,2}$; операторы $\partial_{\lambda\dot{\mu}}$ трансформируются по $D_{1,1}$.

Составим произведения $\partial_{\lambda\dot{\mu}} f_{\sigma\rho}$ и $\partial_{\lambda\dot{\mu}} f_{\dot{\sigma}\dot{\rho}}$ и образуем из них линейные комбинации, которые трансформируются как компоненты спинтензора тока $s_{\lambda\dot{\mu}}$, т. е. по $D_{1,1}$.

Рассмотренный нами в главе IV метод позволяет непосредственно написать:

$$s_{\lambda\dot{\mu}} \sim \partial_{\lambda\dot{\sigma}} f^{\dot{\sigma}}_{\dot{\mu}} + \partial_{\dot{\mu}\sigma} f^{\sigma}_{\lambda}.$$

Для того чтобы заменить знак $\sim$ знаком равенства, выпишем, воспользовавшись уравнением (5.11), одно из этих уравнений, например:

$$s^0 + s^3 \sim s_{1\dot{1}} \sim \partial_{1\dot{1}} f^{\dot{1}}_{\dot{1}} + \partial_{1\dot{2}} f^{\dot{2}}_{\dot{1}} = \partial_{12} f_{1\dot{1}} - \partial_{1\dot{1}} f_{\dot{1}\dot{2}} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\{(F^{10} + F^{13}) + i(F^{20} + F^{23})\} -$$

$$- \left(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^3}\right)\{F^{03} + iF^{21}\} =$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3}\right) + \left(\frac{\partial F^{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{30}}{\partial x^0}\right)\right\} +$$

$$+ i\left\{\left(\frac{\partial F_{32}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial F_{21}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x^1}\right)\right\},$$

откуда получаем окончательно:

$$2s_{\lambda\dot{\mu}} = \partial_{\lambda\dot{\sigma}} f^{\dot{\sigma}}_{\dot{\mu}} + \partial_{\dot{\mu}\sigma} f^{\sigma}_{\lambda}\,.$$

СПИНТЕНЗОР ЭНЕРГИИ ИМПУЛЬСА

Рассмотрим спинтензор $t_{\lambda\mu\dot{\nu}\dot{\rho}}$, соответствующий тензору T^{ik}, следующим образом составленный из компонент спинтензоров электромагнитного поля $f_{\lambda\mu}$ и $f_{\dot{\lambda}\dot{\mu}}$:

$$f_{\lambda\mu\dot{\nu}\dot{\rho}} = f_{\lambda\mu} f_{\dot{\nu}\dot{\rho}}\,.$$

Выделим из него антисимметричную часть, т. е. составим те линейные комбинации, которые трансформируются по $D_{2,0}$ и $D_{0,2}$.

Получаем:

по $D_{2,0}$ трансформируется $t^{\dot{\nu}}_{\lambda\mu\dot{\nu}} = f_{\lambda\mu} f^{\dot{\nu}}_{\dot{\nu}} = 0$

по $D_{0,2}$ » $t^{\lambda}_{\lambda\dot{\nu}\dot{\rho}} = f^{\lambda}_{\lambda} f_{\dot{\nu}\dot{\rho}} = 0.$

Тензор T^{ik} будет, следовательно, симметричным тензором. Образуем инвариант, трансформирующийся по $D_{0,0}$, и получим:

$$t^{\lambda\dot{\nu}}_{\lambda\dot{\nu}} = f^{\lambda}_{\lambda} f^{\dot{\nu}}_{\dot{\nu}} = 0,$$

т. е. инвариант T^{i}_{i} тензора T^{ik} будет равен нулю.

Симметричный тензор T^{ik} имеет 10 компонент $T^{ik}=T^{ki}$, связанных условием $T^i_i=0$. Независимых величин, определяющих тензор T^{ik}, будет, следовательно, 9, из которых можно составить комбинации, трансформирующиеся по $\boldsymbol{D}_{2,2}$. Выпишем в явном виде компоненты спинтензора $t_{\mu\nu\dot\rho\dot\sigma}$:

$$t_{\mu\nu\dot\rho\dot\sigma}=\begin{pmatrix} t_{11\dot1\dot1} & t_{11\dot1\dot2} & t_{11\dot2\dot2} \\ t_{12\dot1\dot2} & t_{12\dot1\dot2} & t_{12\dot2\dot2} \\ t_{22\dot1\dot1} & t_{22\dot1\dot2} & t_{22\dot2\dot2} \end{pmatrix},$$

$$t_{11\dot1\dot1}=(H_y-E_x)^2+(H_x+E_y)^2,$$
$$t_{12\dot1\dot2}=E_z^2+H_z^2,$$
$$t_{22\dot2\dot2}=(H_y+E_x)^2+(H_x-F_y)^2,$$
$$t_{11\dot1\dot2}=(E_zH_y-E_xE_z+H_xH_z+H_zE_y)+i(H_zH_y-H_zE_x-H_xE_z-E_yE_z),$$
$$t_{12\dot2\dot2}=(E_zE_x+E_zH_y-H_zE_y+H_zH_x)+i\,(H_zE_x+H_zH_y+E_zE_y-H_zH_x),$$
$$t_{11\dot2\dot2}=(E_y^2-E_x^2+H_y^2-H_x^2)+i\,(H_xE_x+H_xE_x+H_yE_y+H_yE_y),$$
$$t_{12\dot1\dot1}=(E_zH_y-E_xE_z+H_xH_z+H_zE_y)-i\,(H_zH_y-H_zE_x-H_xE_z-E_yE_z),$$
$$t_{22\dot1\dot2}=(E_zE_x+E_zH_y-H_zE_y+H_zH_x)-i(H_zE_x+H_zH_y+E_zE_y-H_zH_x),$$
$$t_{22\dot1\dot1}=(E_y^2-E_x^2+H_y^2-H_x^2)-i\,(H_xE_x+H_xE_x+H_yE_y+H_yE_y).$$

Найдем теперь систему диференциальных уравнений, которым удовлетворяет спинтензор $t_{\lambda\mu\dot\nu\dot\rho}$, и убедимся, что он соответствует тензору энергий — импульса в четырехмерной формулировке Минковского.

Запишем систему уравнений Максвелла и систему комплексно-сопряженных уравнений:

$$\partial_{\dot\rho\sigma}f^{\sigma}_{\mu}+\partial_{\mu\dot\sigma}f^{\dot\sigma}_{\dot\rho}=2s_{\dot\rho\mu},$$

$$\partial_{\lambda\dot\nu}f^{\dot\nu}_{\dot\sigma}+\partial_{\dot\sigma\nu}f^{\nu}_{\lambda}=2s_{\lambda\dot\sigma}.$$

Помножив первую систему на $f^{\dot\sigma}_{\dot\rho}$, а вторую на f^{μ}_{λ} и сложив, получим:

$$\frac{1}{4}\left\{\underline{\underline{f^{\dot\sigma}_{\dot\rho}\,\partial_{\lambda\dot\nu}f^{\dot\nu}_{\dot\sigma}}}+f^{\dot\sigma}_{\dot\rho}\,\partial_{\dot\sigma\nu}f^{\nu}_{\lambda}+\underline{\underline{f^{\mu}_{\lambda}\,\partial_{\dot\rho\sigma}f^{\sigma}_{\mu}}}+f^{\mu}_{\lambda}\,\partial_{\mu\dot\sigma}f^{\dot\sigma}_{\dot\rho}\right\}=$$
$$=s_{\lambda\dot\sigma}f^{\dot\sigma}_{\dot\rho}+s_{\dot\rho\mu}f^{\mu}_{\lambda}.$$

При помощи второй системы уравнений Максвелла преобразуем дважды подчеркнутые члены:

$$f^{\dot\sigma}_{\dot\rho}\,\partial_{\dot\lambda\nu} f^{\nu}_{\dot\sigma} = f^{\dot\sigma}_{\dot\rho}\,\partial_{\dot\sigma\nu} f^{\nu}_{\dot\lambda}\,,$$

$$f^{\mu}_{\lambda}\,\partial_{\dot\rho\sigma} f^{\sigma}_{\mu} = f^{\mu}_{\lambda}\,\partial_{\mu\dot\sigma} f^{\dot\sigma}_{\dot\rho}$$

и получим:

$$\frac{1}{2}\left\{f^{\dot\sigma}_{\dot\rho}\,\partial_{\dot\lambda\nu} f^{\nu}_{\lambda} + f^{\nu}_{\lambda}\,\partial_{\nu\dot\sigma} f^{\dot\sigma}_{\dot\rho}\right\} = s_{\lambda\dot\sigma} f^{\dot\sigma}_{\dot\rho} + s_{\dot\rho\mu} f^{\mu}_{\lambda}$$

или окончательно:

$$\partial_{\dot\sigma\nu}\left\{\frac{1}{4} f^{\dot\rho\dot\sigma} f^{\lambda\nu}\right\} = \frac{1}{2}\left\{s^{\lambda}_{\dot\sigma}\, f^{\dot\rho\dot\sigma} + s^{\dot\rho}_{\sigma} f^{\lambda\sigma}\right\}.$$

Это уравнение является выражением, в спинорной форме, пондермоторного действия электромагнитного поля на вызывающие его заряды и токи.

Спинтензор

$$t^{\dot\rho\sigma\lambda\nu} = \frac{1}{4} f^{\dot\rho\dot\sigma} f^{\lambda\nu}$$

соответствует четырехмерному тензору энергии импульса. Выражение

$$k_{\lambda\dot\rho} = \frac{1}{2}\left(s^{\dot\sigma}_{\lambda}\, f_{\dot\sigma\dot\rho} + s^{\sigma}_{\dot\rho} f_{\sigma\lambda}\right)$$

дает в спинорной форме выражение для четырехмерной силы Лоренца

$$k^{i} = s_{\sigma} F^{\sigma k}.$$

Проверить этот результат непосредственным вычислением предоставляем читателю.

Уравнения Максвелла остаются инвариантными, если вместо потенциалов φ_i ввести потенциалы

$$\varphi'_i = \varphi_i + \frac{\partial\Lambda}{\partial x^i}\,,$$

где Λ — произвольный скаляр. Поэтому можно условиться нормировать потенциалы φ_i так, чтобы соблюдалось условие Лоренца:

$$\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^i} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{c\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} = 0\right).$$

Убедимся, что выражение

$$f_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\lambda\dot\sigma}\varphi^{\dot\sigma}_{\mu} + \partial_{\mu\dot\sigma}\varphi^{\dot\sigma}_{\lambda}\right)$$

инвариантно, если вместо потенциалов $\varphi_{\lambda\dot\mu}$ ввести потенциалы

$$\varphi'_{\lambda\dot\mu} = \varphi_{\lambda\dot\mu} + \partial_{\lambda\dot\mu}\Lambda.$$

В самом деле, имеем:

$$f'_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\lambda\dot\sigma}\partial^{\dot\sigma}_{\mu} + \partial_{\mu\dot\sigma}\partial^{\dot\sigma}_{\lambda}\right)\Lambda + f_{\lambda\mu}.$$

Но оператор, стоящий в скобках, тождественно равен нулю:

$$\partial_{\lambda\dot\sigma}\partial^{\dot\sigma}_{\mu} + \partial_{\mu\dot\sigma}\partial^{\dot\sigma}_{\lambda} = \partial_{\lambda\dot\sigma}\partial^{\dot\sigma}_{\mu} - \partial^{\dot\sigma}_{\mu}\partial_{\lambda\dot\sigma} \equiv 0,$$

и следовательно,

$$f'_{\lambda\mu} = f_{\lambda\mu}.$$

Заметим, что, комбинируя первую и вторую системы уравнений, мы можем писать первую систему в виде:

$$\boxed{\partial_{\lambda\dot\sigma} f^{\dot\sigma}_{\rho} = s_{\lambda\dot\rho}.}$$

Если пользоваться нормированными потенциалами $\varphi_{\lambda\dot\mu}$, т. е. принять, что $\partial_{\lambda\dot\mu}\varphi^{\lambda\dot\mu} = 0$, то

$$\partial_{\lambda\dot\sigma}\varphi^{\dot\sigma}_{\mu} - \partial_{\mu\dot\sigma}\varphi^{\dot\sigma}_{\lambda} = 0.$$

В самом деле,

$$\partial_{1\dot\sigma}\varphi^{\dot\sigma}_{2} - \partial_{2\dot\sigma}\varphi^{\dot\sigma}_{1} = -\partial_{1\dot\sigma}\varphi^{1\dot\sigma} - \partial_{2\dot\sigma}\varphi^{2\dot\sigma} = -\partial_{\lambda\dot\sigma}\varphi^{\lambda\dot\sigma} = 0.$$

Поэтому вместо формулы

$$f_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\lambda\dot\sigma}\varphi^{\dot\sigma}_{\mu} + \partial_{\mu\dot\sigma}\varphi^{\dot\sigma}_{\lambda}\right)$$

можно, считая потенциалы $\varphi_{\mu\dot\sigma}$ нормированными, пользоваться формулой:

$$\boxed{f_{\lambda\mu} = \partial_{\lambda\dot\sigma}\varphi^{\dot\sigma}_{\mu}.}$$

	Векторная форма	Тензорная форма	Спинорная форма
Напряжение поля	$\mathbf{E}, \quad \mathbf{H}$	F^{ik}	$f_{\lambda\mu}$
Плотность заряда и тока	$\rho, \quad \mathbf{j}$	s^i	$s_{\lambda\dot\mu}$
Потенциалы	$\varphi, \quad \mathbf{A}$	φ^i	$\varphi_{\lambda\dot\mu}$
I система уравнений Максвелла	$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \\ \operatorname{div}\mathbf{E} &= 4\pi\rho \end{aligned}\right\}$	$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = s^i$	$\frac{1}{2}\left(\partial_{\lambda\dot\sigma} f^{\dot\sigma}_{\ \dot\rho} + \partial_{\dot\rho\sigma} f^{\sigma}_{\ \lambda}\right) = s_{\lambda\dot\rho}$
II система уравнений Максвелла	$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0 \end{aligned}\right\}$	$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0$	$\partial_{\lambda\dot\sigma} f^{\dot\sigma}_{\ \dot\rho} - \partial_{\dot\rho\sigma} f^{\sigma}_{\ \lambda} = 0$
Эквивалентное второй системе уравнений Максвелла соотношение между напряжением поля и потенциалами	$\left.\begin{aligned} \mathbf{H} &= \operatorname{rot}\mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned}\right\}$	$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k}$	$f_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\lambda\dot\sigma}\varphi^{\dot\sigma}_{\ \mu} + \partial_{\mu\dot\sigma}\varphi^{\dot\sigma}_{\ \lambda}\right)$
Тензор энергии импульса	формулы (5.5) стр. 55	$T^{ik} = F^{i}_{\ \sigma}F^{\sigma k} - \frac{1}{4}\delta^{ik}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$	$t_{\lambda\mu\dot\nu\dot\rho} = \frac{1}{4}f_{\lambda\mu}f_{\dot\nu\dot\rho}$

УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

По теории относительности энергия W и импульс p свободной частицы массы m выражаются через скорость v следующим образом:

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

где c — скорость света. Исключая из этих выражений скорость, получим:

$$\frac{W^2}{c^2} - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = m^2c^2.$$

При переходе к волновой механике необходимо в этом выражении классические величины, энергию и импульс заменить соответствующими операторами[1]:

$$W \to hi\frac{\partial}{\partial t}, \quad p_1 = -hi\frac{\partial}{\partial x}, \quad p_2 = -hi\frac{\partial}{\partial y}, \quad p_3 = -hi\frac{\partial}{\partial z},$$

действующими на волновую функцию $\psi(x, y, z, t)$. Мы получим произведя эту замену, волновое уравнение для функции ψ:

$$\Box\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{m^2c^2}{h^2}\psi = \frac{1}{\lambda_0^2}\psi, \qquad (5.12)$$

где через λ_0 обозначена фундаментальная мировая постоянная, имеющая размерность длины и называемая длиной волны Комптона. Дираку принадлежит мысль рассматривать уравнение (5.12) для волнового поля электрона как аналог волнового уравнения в оптике

$$\Box\varphi = 0$$

и искать систему линейных диференциальных уравнений первого порядка, аналогичных уравнениям Максвелла, из которых как следствие вытекает уравнение (5.5). Для того чтобы получить систему уравнений Дирака, разложим, воспользовавшись системой кватернионов, оператор $\Box$ на два линейных множителя:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + s_1\frac{\partial}{\partial x} + s_2\frac{\partial}{\partial y} + s_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - s_1\frac{\partial}{\partial x} - s_2\frac{\partial}{\partial y} - s_3\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

---

[1] В дальнейшем через h обозначена деленная на 2π постоянная Планка.

Такое разложение оператора $\Box$ на два линейных множителя не представляет ничего существенно нового в математике.

Рассмотрим функцию $\psi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$. Для того чтобы функция

$$\psi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

имела производную

$$\psi'(z) = \lim \frac{\psi(z + \Delta z) - \psi(z)}{\Delta z},$$

не зависящую от отношения $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, в приращении Δz необходимо, чтобы

$$\lim \frac{\psi(z + \Delta x) - \psi(z)}{\Delta x} = \lim \frac{\psi(z + i\Delta y) - \psi(z)}{i\Delta y}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{5.13}$$

откуда получаем для функций u и v систему диференциальных уравнений Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Диференцируя первое уравнение по x, второе по y, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

или окончательно:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Покажем теперь, что, наоборот, исходя из последнего уравнения, мы можем получить систему уравнений Коши-Римана, разлагая оператор $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ на линейные множители:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

В самом деле, из

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi=0$$

следует:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)=0. \tag{5.14}$$

Разделяя вещественную часть от мнимой, получим систему уравнений Коши-Римана.

С точки зрения изложенных здесь соображений получение уравнений Дирака сводится к разложению четырехмерного оператора $\square$ на множители, что возможно, конечно, лишь в области кватернионов.

Уравнение (5.5), очевидно, эквивалентно следующей паре уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\left\{s_0\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+s_1\frac{\partial}{\partial x}+s_2\frac{\partial}{\partial y}+s_3\frac{\partial}{\partial z}\right\}u=-\frac{i}{\lambda_0}v,\\ \left\{s_0\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-s_1\frac{\partial}{\partial x}-s_2\frac{\partial}{\partial y}-s_3\frac{\partial}{\partial z}\right\}v=-\frac{i}{\lambda_0}u,\end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

где u и v — две различные функции, обе удовлетворяющие уравнению:

$$\square\psi+\frac{1}{\lambda_0^2}\psi=0.$$

Рассматривая u и v как векторы в двумерном комплексном векторном пространстве и переходя к двухрядным представлениям кватернионных единиц $s_0s_1s_2s_3$, получим систему уравнений Дирака:

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial}{c\partial t}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial z}\right\}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\\&\qquad\qquad=-\frac{i}{\lambda_0}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix},\\&\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{\partial}{c\partial t}-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}-\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}-\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial z}\right\}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\\&\qquad\qquad=-\frac{i}{\lambda_0}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}.\end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

Ввиду важности этой системы уравнений запишем ее еще в двух других формах:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{c\partial t}u_1+\frac{\partial}{\partial x}u_2+i\frac{\partial}{\partial y}u_2+\frac{\partial}{\partial z}u_1=-\frac{i}{\lambda_0}v_1,\\
&\frac{\partial}{c\partial t}u_2+\frac{\partial}{\partial x}u_1-i\frac{\partial}{\partial y}u_1-\frac{\partial}{\partial z}u_2=-\frac{i}{\lambda_0}v_2,\\
&\frac{\partial}{c\partial t}v_1-\frac{\partial}{\partial x}v_2-i\frac{\partial}{\partial y}v_2-\frac{\partial}{\partial z}v_1=-\frac{i}{\lambda_0}u_1,\\
&\frac{\partial}{c\partial t}v_2-\frac{\partial}{\partial x}v_1+i\frac{\partial}{\partial y}v_1+\frac{\partial}{\partial z}v_2=-\frac{i}{\lambda_0}u_2,
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\frac{\partial}{c\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}, & \frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{c\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=-\frac{i}{\lambda_0}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix},\\
&\begin{pmatrix}\frac{\partial}{c\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}, & -\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ -\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right), & \frac{\partial}{c\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=-\frac{i}{\lambda_0}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{II})$$

и перейдем к исследованию инвариантности этой системы уравнений при преобразованиях Лоренца. Для этой цели удобно перейти к спинорной форме записи уравнений Дирака:

$$\begin{pmatrix}\partial^{1\dot1} & \partial^{2\dot1}\\ \partial^{1\dot2} & \partial^{2\dot2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}+\frac{i}{\lambda_0}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=0;$$

$$\begin{pmatrix}\partial_{1\dot1} & \partial_{1\dot2}\\ \partial_{2\dot1} & \partial_{2\dot2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}+\frac{i}{\lambda_0}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=0$$

или

$$\partial^{1\dot1}u_1+\partial^{2\dot1}u_2+\frac{i}{\lambda_0}v_1=0,$$

$$\partial^{1\dot2}u_1+\partial^{2\dot2}u_2+\frac{i}{\lambda_0}v_2=0,$$

$$\partial_{1\dot1}v_1+\partial_{1\dot2}v_2+\frac{i}{\lambda_0}u_1=0,$$

$$\partial_{2\dot1}v_1+\partial_{2\dot2}v_2+\frac{i}{\lambda_0}u_2=0.$$

Этот вид уравнений Дирака ясно показывает, что они будут инвариантны при бинарных преобразованиях, если величины u_1, u_2, v_1, v_2 будут трансформироваться как компоненты спинора

$$u_1 \sim \xi_1, \quad v_1 \sim \eta^{\dot{1}},$$
$$u_2 \sim \xi_2, \quad v_2 \sim \eta^{\dot{2}}.$$

Система уравнений Дирака запишется тогда в виде:

$$\partial^{\lambda\dot{\mu}}\xi_\lambda + \frac{i}{\lambda_0}\eta^{\dot{\mu}} = 0, \qquad \partial_{\lambda\dot{\mu}}\eta^{\dot{\mu}} + \frac{i}{\lambda_0}\xi_\lambda = 0, \tag{5.17}$$

в котором их инвариантность при бинарных преобразованиях, а следовательно и при преобразованиях Лоренца, очевидна.

Исследуем теперь инвариантность уравнений Дирака при операции зеркального отражения (стр. 45). При переходе

$$x \to -x, \quad y \to -y, \quad z \to -z$$

уравнения Дирака переходят в

или

$$\left.\begin{aligned} &\partial_{\lambda\dot{\mu}}\xi^{\dot{\lambda}} + \frac{i}{\lambda_0}\eta_\mu = 0, \quad \partial^{\dot{\lambda}\mu}\eta_\mu + \frac{i}{\lambda_0}\xi^{\dot{\lambda}} = 0, \\ &\partial^{\lambda\dot{\mu}}\eta_\lambda + \frac{i}{\lambda_0}\xi^{\dot{\mu}} = 0, \quad \partial_{\mu\dot{\lambda}}\xi^{\dot{\lambda}} + \frac{i}{\lambda_0}\eta_\mu = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

Мы видим, что уравнения Дирака сохраняют свой вид, если при операции зеркального отражения произвести замену:

$$\xi_\lambda \to \eta_\lambda, \quad \eta^{\dot{\mu}} \to \xi^{\dot{\mu}},$$

т. е. переставить обе функции u и v.

Проведенное нами исследование показывает, что функции u_1, u_2, v_1, v_2 образуют биспинор $(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4) = (u_1u_2v_1v_2)$, законы трансформации которого были нами исследованы в гл. IV, (стр. 49).

Заметим, что не наличие массы у электрона, а требование инвариантности при зеркальном отражении обусловливает существование четырех функций в уравнении Дирака.

Допустим, что мы ищем волновое уравнение для частицы с массой нуль. Разлагая оператор $\Box$ на два множителя, мы получим волновое уравнение в виде:

$$\left\{\frac{\partial}{c\partial t}+s_1\frac{\partial}{\partial x}+s_2\frac{\partial}{\partial y}+s_3\frac{\partial}{\partial z}\right\}\psi=0. \tag{5.19}$$

Легко, однако, видеть, что оно не сохраняет своей формы при переходе ($x\to -x$, $y\to -y$, $z\to -z$), а переходит в

$$\left\{\frac{\partial}{c\partial t}-s_1\frac{\partial}{\partial x}-s_2\frac{\partial}{\partial y}-s_3\frac{\partial}{\partial z}\right\}\psi=0. \tag{5.20}$$

Для описания частицы с массой нуль мы должны опять брать оба уравнения (5.19) и (5.20):

$$\left(\frac{\partial}{c\partial t}+s_1\frac{\partial}{\partial x}+s_2\frac{\partial}{\partial y}+s_3\frac{\partial}{\partial z}\right)p=0,$$
$$\left(\frac{\partial}{c\partial t}-s_1\frac{\partial}{\partial x}-s_2\frac{\partial}{\partial y}-s_3\frac{\partial}{\partial z}\right)q=0$$

и условиться, что при операции зеркального отражения функции $p=(p_1p_2)$ и $q=(q_1q_2)$ меняются местами.

В спинорной форме система уравнений Дирака для частицы массы нуль перепишется в виде:

$$\partial^{1\dot 1}p_1+\partial^{2\dot 1}p_2=0,$$
$$\partial^{1\dot 2}p_1+\partial^{2\dot 2}p_2=0,$$
$$\partial_{1\dot 1}q_1+\partial_{1\dot 2}q_2=0,$$
$$\partial_{2\dot 1}q_1+\partial_{2\dot 2}q_2=0.$$

Эта система уравнений в частном случае совпадает с системой уравнений Максвелла в пустом пространстве ($s^{\lambda\dot\mu}=0$):

$$\partial_{1\dot 1}f^{1\dot 1}+\partial_{\dot 2 1}f^{1\dot 1}=0,$$
$$\partial_{\dot 1 2}f^{1\dot 1}+\partial_{\dot 2 2}f^{\dot 2 1}=0,$$
$$\partial_{1\dot 1}f^{1\dot 2}+\partial_{\dot 2 1}f^{\dot 2\dot 2}=0,$$
$$\partial_{\dot 1 2}f^{1\dot 2}+\partial_{\dot 2 2}f^{\dot 2\dot 2}=0,$$

если ее переписать в виде:

$$\left.\begin{aligned} \partial^{1\dot{1}} f_{12} + \partial^{2\dot{1}} f_{22} = 0, \\ \partial^{1\dot{2}} f_{12} + \partial^{2\dot{2}} f_{22} = 0, \\ \partial_{\dot{1}1} f^{\dot{1}\dot{2}} + \partial_{\dot{2}1} f^{\dot{2}\dot{2}} = 0, \\ \partial_{2\dot{1}} f^{\dot{1}\dot{2}} + \partial_{\dot{2}2} f^{\dot{2}\dot{2}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

и положить

$$p = (f_{12}, f_{22}),$$
$$q = (f^{\dot{1}\dot{2}}, f^{\dot{2}\dot{2}}).$$

Этим исследованием мы показали, что

1) система уравнений Дирака для частицы с массой нуль совпадает с системой уравнений Максвелла (это позволяет рассматривать последние в известном смысле как уравнения Дирака для фотона);

2) уравнения Максвелла инвариантны при операции зеркального отражения.

Несмотря на эту внутреннюю связь между уравнениями Дирака и Максвелла, их глубокое различие заключается в том, что величины u, v трансформируются как спиноры по $\boldsymbol{D}_{1,0}$ и $\boldsymbol{D}_{0,1}$, а величины (p, q) — как спинтензоры по $\boldsymbol{D}_{2,0}$ и $\boldsymbol{D}_{0,2}$. Это различие в трансформационных свойствах обусловливается физическим различием между величинами, которые характеризуют волновое поле электрона и фотона.

Для уяснения этого различия обратимся к выражению для интенсивности световых волн в оптике. Выражение

$$I = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) \tag{5.22}$$

дает нам плотность интенсивности волн света в каждой точке пространства. С другой стороны, оно дает выражение для плотности энергии электромагнитного поля. Интегрируя I по всему пространству, мы получим энергию W электромагнитного поля:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 + H^2)\,dv. \tag{5.23}$$

Но мы знаем, что пространство, заполненное волнами света, можно рассматривать как заполненное фотонами, каждый из которых обладает энергией $h\omega$. Считая, что мы имеем дело с монохроматическим светом, мы должны, обозначая через N число фотонов, положить:

$$\frac{1}{8\pi}\int (E^2 + H^2)\,dv = Nh\omega. \tag{5.24}$$

В случае, если свет не монохроматический, то, обозначая через dN_ω число фотонов с энергией между $h\omega$ и $h\omega + d\omega$, будем иметь:

$$\frac{1}{8\pi}\int (E^2 + H^2)\,dv = \int h\omega\, dN_\omega. \tag{5.24a}$$

Этими соотношениями устанавливается соответствие между интенсивностью волны в волновой картине и числом частиц в корпускулярной картине.

Если мы обратимся к катодным лучам, то заметим, что в отличие от фотона электрон, как частица, несет с собой не только энергию, но и электрический заряд, равный элементарному количеству электричества e.

Желая по аналогии с корпускулярной теорией света сопоставить интенсивность катодных волн с числом электронов, мы должны положить:

$$\int (\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4)\,dv = Ne. \tag{5.25}$$

Отметим два существенных отличия между электрическими зарядами электрона и «энергетическими зарядами» фотона:

1. Частицы могут обмениваться своими энергиями, нарушая монохроматическое распределение энергии в случае, если оно в какой-нибудь момент времени было осуществлено. Частицы не могут отдавать друг другу часть своего электрического за-

ряда, а потому отпадает необходимость в случае катодных волн писать формулу, аналогичную (5.24а).

2. В правой части (5.24) стоит энергия, в правой части (5.25) — заряд. Последний является величиной, инвариантной при переходе к подвижной системе отсчета, в то время как значение энергии изменит свою величину, а это означает, что волновую функцию для катодных лучей мы можем нормировать независимым от системы отсчета способом:

$$\int (\psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 + \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4)\, dv = N. \tag{5.26}$$

Волновую функцию для фотонов мы можем нормировать лишь для одной из систем отсчета. При переходе к другой системе отсчета нормировка волновой функции фотонов должна быть изменена:

$$\int (E^2 + N^2)\, dv = 8\pi W \text{ (для одной определенной системы отсчета).} \tag{5.27}$$

УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

По волновой механике для описания движения электрона во внешнем электромагнитном поле, заданном потенциалами: φ, A_x, A_y, A_z, надо вместо операторов $\frac{1}{c\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ пользоваться операторами

$$\left.\begin{aligned}
D_t &= \frac{\partial}{c\partial t} + i\,\frac{e}{hc}\varphi,\\
D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{e}{hc}A_x,\\
D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + i\,\frac{e}{hc}A_y,\\
D_z &= \frac{\partial}{\partial z} + i\,\frac{e}{hc}A_z.
\end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться четырехмерным вектор-потенциалом Φ_i, компоненты которого равны:

$$\Phi^0 = \frac{e}{hc}\varphi, \quad \Phi^1 = \frac{e}{hc}A_x, \quad \Phi^2 = \frac{e}{hc}A_y, \quad \Phi^3 = \frac{e}{hc}A_z.$$

Отметим, что в то время как операторы $\frac{\partial}{\partial x^i}$ перестановочны друг с другом, это уже не имеет места для операторов D_i. В самом деле, вычисление дает:

$$\left.\begin{aligned}
D_tD_x - D_xD_t &= i\frac{e}{hc}E_x,\\
D_tD_y - D_yD_t &= i\frac{e}{hc}E_y,\\
D_tD_z - D_zD_t &= i\frac{e}{hc}E_z,\\
D_xD_y - D_yD_x &= i\frac{e}{hc}H_z,\\
D_yD_z - D_zD_y &= i\frac{e}{hc}H_x,\\
D_zD_x - D_xD_z &= i\frac{e}{hc}H_y,
\end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

где E и H — компоненты электромагнитного поля.

В спинорной форме мы будем иметь вместо операторов $\partial_{\lambda\dot{\mu}}$ операторы $D_{\lambda\dot{\mu}} = \partial_{\lambda\dot{\mu}} + i\Phi_{\lambda\dot{\mu}}$, где $\Phi_{\lambda\dot{\mu}}$ — спинтензор потенциала.

Вычислим выражение для $D_{\lambda\dot{\mu}}D^{\dot{\mu}}_{\sigma}\psi$ и получим:

$$\begin{aligned}
&(\partial_{\lambda\dot{\mu}} + i\Phi_{\lambda\dot{\mu}})(\partial^{\dot{\mu}}_{\sigma} + i\Phi^{\dot{\mu}}_{\sigma})\psi = \\
&\quad = \partial_{\lambda\dot{\mu}}\partial^{\dot{\mu}}_{\sigma}\psi + i\Phi_{\lambda\dot{\mu}}\partial^{\dot{\mu}}_{\sigma}\psi - \Phi_{\lambda\dot{\mu}}\Phi^{\dot{\mu}}_{\sigma} + i\partial_{\lambda\dot{\mu}}\Phi^{\dot{\mu}}_{\sigma}\psi + i\Phi^{\dot{\mu}}_{\sigma}\partial_{\lambda\dot{\mu}}\psi = \\
&\quad = \partial_{\lambda\dot{\mu}}\partial^{\dot{\mu}}_{\sigma}\psi + i(\Phi_{\lambda\dot{\mu}}\partial^{\dot{\mu}}_{\sigma} + \Phi^{\dot{\mu}}_{\sigma}\partial_{\lambda\dot{\mu}})\psi + i\partial_{\lambda\dot{\mu}}\Phi^{\dot{\mu}}_{\sigma}\psi - \Phi_{\lambda\dot{\mu}}\Phi^{\dot{\mu}}_{\sigma}.
\end{aligned}$$

Аналогичное вычисление для $D^{\dot{\mu}}_{\sigma}D_{\lambda\dot{\mu}}\psi$ дает:

$$\partial^{\dot{\mu}}_{\sigma}\partial_{\lambda\dot{\mu}}\psi + i(\Phi^{\dot{\mu}}_{\sigma}\partial_{\lambda\dot{\mu}} + \Phi_{\lambda\dot{\mu}}\partial^{\dot{\mu}}_{\sigma})\psi + i\partial^{\dot{\mu}}_{\sigma}\Phi_{\lambda\dot{\mu}}\psi - \Phi^{\dot{\mu}}_{\sigma}\Phi_{\lambda\dot{\mu}}\psi.$$

Вычитая из первого выражения второе, получим:

$$D_{\lambda\dot{\mu}}D^{\dot{\mu}}_{\sigma} - D^{\dot{\mu}}_{\sigma}D_{\lambda\dot{\mu}} = i(\partial_{\lambda\dot{\mu}}\Phi^{\dot{\mu}}_{\sigma} - \partial^{\dot{\mu}}_{\sigma}\Phi_{\lambda\dot{\mu}})\psi = 2i\frac{e}{hc}f_{\lambda\sigma}\psi,$$

или в несколько иной форме:

$$D_{\lambda\dot{\mu}}D^{\dot{\mu}}_{\sigma} + D_{\sigma\dot{\mu}}D^{\dot{\mu}}_{\lambda} = 2i\frac{e}{hc}f_{\lambda\sigma}. \tag{5.30}$$

Вычислим, с другой стороны, разность

$$D_{\lambda\dot{\mu}} D^{\dot{\mu}}_{\sigma} - D_{\sigma\dot{\mu}} D^{\dot{\mu}}_{\lambda}$$

и, свертывая ее по индексам λ и σ, имеем:

$$g^{\lambda\sigma} (D_{\lambda\dot{\mu}} D^{\dot{\mu}}_{\sigma} - D_{\sigma\dot{\mu}} D^{\dot{\mu}}_{\lambda}) = 2 D_{\lambda\dot{\mu}} D^{\lambda\dot{\mu}},$$

откуда следует:

$$D_{\lambda\dot{\mu}} D^{\dot{\mu}}_{\sigma} - D_{\sigma\dot{\mu}} D^{\dot{\mu}}_{\lambda} = 2 g_{\lambda\sigma} D_{\lambda\dot{\mu}} D^{\lambda\dot{\mu}}. \tag{5.31}$$

Из уравнений (5.30) и (5.31) получаем окончательно:

$$D_{\lambda\dot{\mu}} D^{\dot{\mu}}_{\sigma} = g_{\lambda\sigma} D_{\mu\dot{\rho}} D^{\mu\dot{\rho}} + i \frac{e}{hc} f_{\lambda\sigma}. \tag{5.32}$$

Уравнения Дирака для случая электромагнитного поля имеют вид:

$$D^{\lambda\dot{\mu}} \xi_{\lambda} + \frac{i}{\lambda_0} \eta^{\dot{\mu}} = 0,$$

$$D_{\sigma\dot{\mu}} \eta^{\dot{\mu}} + \frac{i}{\lambda_0} \xi_{\sigma} = 0.$$

Найдем систему диференциальных уравнений второго порядка, которым удовлетворяют спиноры ξ и η. Для этой цели подействуем оператором $D_{\sigma\dot{\mu}}$ на первые два уравнения и оператором $D^{\sigma\dot{\lambda}}$ на вторые два.

Получим:

$$D_{\sigma\dot{\mu}} D^{\lambda\dot{\mu}} \xi_{\lambda} + \frac{i}{\lambda_0} D_{\sigma\dot{\mu}} \eta^{\dot{\mu}} = D_{\sigma\dot{\mu}} D^{\lambda\dot{\mu}} \xi_{\lambda} + \frac{i}{\lambda_0} \left(\frac{-i}{\lambda_0}\right) \xi_{\sigma} = 0,$$

$$D^{\sigma\dot{\lambda}} D_{\sigma\dot{\mu}} \eta^{\dot{\mu}} + \frac{i}{\lambda_0} D^{\sigma\dot{\lambda}} \xi_{\sigma} = D^{\sigma\dot{\lambda}} D_{\sigma\dot{\mu}} \eta^{\dot{\mu}} + \frac{i}{\lambda_0} \left(\frac{-i}{\lambda_0}\right) \eta^{\dot{\lambda}} = 0,$$

откуда получаем:

$$\left. \begin{aligned} D_{\sigma\dot{\mu}} D^{\dot{\mu}}_{\lambda} \xi^{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0^2} \xi_{\sigma} = 0, \\ D^{\sigma\dot{\lambda}} D^{\dot{\mu}}_{\sigma} \eta_{\dot{\mu}} - \frac{1}{\lambda_0^2} \eta^{\dot{\lambda}} = 0 \end{aligned} \right\} \tag{5.33}$$

— две системы уравнений второго порядка для спиноров ξ и η.

Подставляя в них операторы (5.32), получим систему уравнений (5.33) в несколько ином виде:

$$(g_{\sigma\lambda} D_{\rho\dot{\mu}} D^{\rho\dot{\mu}} + if_{\sigma\lambda})\xi^{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0^2}\xi_{\sigma} = 0,$$

$$(g^{\dot{\lambda}\dot{\mu}} D_{\rho\dot{\sigma}} D^{\rho\dot{\sigma}} + if^{\dot{\lambda}\dot{\mu}})\eta_{|\dot{\mu}} - \frac{1}{\lambda_0^2}\eta^{\dot{\lambda}} = 0$$

или окончательно:

$$\left.\begin{aligned} \left\{D_{\rho\dot{\mu}} D^{\rho\dot{\mu}} - \frac{1}{\lambda_0^2}\right\}\xi_{\sigma} &= -i\frac{e}{hc} f_{\sigma\lambda}\xi^{\lambda}, \\ \left\{D_{\rho\dot{\mu}} D^{\rho\dot{\mu}} - \frac{1}{\lambda_0^2}\right\}\eta^{\dot{\lambda}} &= i\frac{e}{hc} f^{\dot{\lambda}\dot{\mu}}\eta_{|\dot{\mu}}. \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

Если пренебречь стоящей в правой части небольшой величиной, обусловливающей эффект спина в теории Дирака, то получим в спинорной записи следующее релятивистское волновое уравнение Клейна-Гордана, не учитывающее явления спина:

$$\left\{\frac{1}{c^2}D_t^2 - D_x^2 - D_y^2 - D_z^2 + \frac{1}{\lambda_0^2}\right\}\psi = 0.$$

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Как известно, в теории Максвелла существует симметричный тензор энергии-импульса T^{ik}, удовлетворяющий условию:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = F^{i\sigma}s_{\sigma}. \tag{5.35}$$

В случае отсутствия токов и зарядов $s_{\sigma} = 0$, и условие

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0$$

выражает закон сохранения энергии и импульса электромагнитного поля. Существенно, что компоненты этого тензора являются квадратичными формами компонент E и H электромагнитного поля.

Мы сейчас убедимся, что и из компонент ξ_{λ} и $\eta^{\dot{\lambda}}$ дираковского поля можно составить квадратичные выражения, из которых составляется вектор s^i, удовлетворяющий условию:

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^i} = 0 \tag{5.36}$$

и который в силу физического значения компонент волновой функции Дирака отождествляют с четырехмерным вектором тока. Запишем четыре уравнения Дирака:

$$\left.\begin{array}{ll}
\partial^{\lambda\dot{\mu}}\xi_\lambda + i\Phi^{\lambda\dot{\mu}}\xi_\lambda + \frac{i}{\lambda_0}\eta^{\dot{\mu}} = 0 & \Big|\ \overset{*}{\xi}_{\dot{\mu}} \\
\partial_{\sigma\dot{\mu}}\eta^{\dot{\mu}} + i\Phi_{\sigma\dot{\mu}}\eta^{\dot{\mu}} + \frac{i}{\lambda_0}\xi_\sigma = 0 & \Big|\ \overset{*}{\eta}^{\sigma} \\
\text{и четыре к ним комплексно-сопряженных:} & \\
\partial^{\dot{\lambda}\mu}\overset{*}{\xi}_{\dot{\lambda}} - i\Phi^{\dot{\lambda}\mu}\overset{*}{\xi}_{\dot{\lambda}} - \frac{i}{\lambda_0}\overset{*}{\eta}^{\mu} = 0 & \Big|\ \xi_\mu \\
\partial_{\dot{\sigma}\mu}\overset{*}{\eta}^{\mu} - i\Phi_{\dot{\sigma}\mu}\overset{*}{\eta}^{\mu} - \frac{i}{\lambda_0}\overset{*}{\xi}_{\dot{\sigma}} = 0 & \Big|\ \eta^{\dot{\sigma}}
\end{array}\right\} \qquad (5.37)$$

Помножая эти четыре уравнения на указанные справа величины и складывая, мы получим:

$$\overset{*}{\xi}_{\dot{\mu}}\partial^{\lambda\dot{\mu}}\xi_\lambda + \overset{*}{\eta}^{\sigma}\partial_{\sigma\dot{\mu}}\eta^{\dot{\mu}} + \xi_\mu\partial^{\dot{\lambda}\mu}\overset{*}{\xi}_{\dot{\lambda}} + \eta^{\dot{\sigma}}\partial_{\dot{\sigma}\mu}\overset{*}{\eta}^{\mu} = \partial_{\lambda\dot{\mu}}(\xi^\lambda\overset{*}{\xi}^{\dot{\mu}} + \eta^\lambda\overset{*}{\eta}^{\dot{\mu}}) = 0.$$

Обозначая через $s^{\lambda\dot{\mu}}$ компоненты спинтензора

$$s^{\lambda\dot{\mu}} = \xi^\lambda\overset{*}{\xi}^{\dot{\mu}} + \eta^\lambda\overset{*}{\eta}^{\dot{\mu}},$$

мы получим, как следствие уравнений Дирака, уравнение непрерывности:

$$\partial_{\lambda\dot{\mu}}s^{\lambda\dot{\mu}} = 0. \qquad (5.38)$$

Для физической интерпретации уравнения (5.38) перейдем к векторной записи:

$$\left.\begin{aligned}
s^0 &= s_{1\dot{1}} + s_{2\dot{2}} = (\xi_1\overset{*}{\xi}_{\dot{1}} + \xi_2\overset{*}{\xi}_{\dot{2}}) + (\eta_1\overset{*}{\eta}_{\dot{1}} + \eta_2\overset{*}{\eta}_{\dot{2}}),\\
s^1 &= s_{1\dot{2}} + s_{2\dot{1}} = (\xi_1\overset{*}{\xi}_{\dot{2}} + \xi_2\overset{*}{\xi}_{\dot{1}}) + (\eta_1\overset{*}{\eta}_{\dot{2}} + \eta_2\overset{*}{\eta}_{\dot{1}}),\\
s^2 &= \frac{1}{i}(s_{1\dot{2}} - s_{2\dot{1}}) = \frac{1}{i}(\xi_1\overset{*}{\xi}_{\dot{2}} - \xi_2\overset{*}{\xi}_{\dot{1}}) + \frac{1}{i}(\eta_1\overset{*}{\eta}_{\dot{2}} - \eta_2\overset{*}{\eta}_{\dot{1}}),\\
s^3 &= s_{1\dot{1}} - s_{2\dot{2}} = (\xi_1\overset{*}{\xi}_{\dot{1}} - \xi_2\overset{*}{\xi}_{\dot{2}}) + (\eta_1\overset{*}{\eta}_{\dot{1}} - \eta_2\overset{*}{\eta}_{\dot{2}}),
\end{aligned}\right\} \qquad (5.39)$$

s_0 дает плотность вероятности найти электрон в точке x, y, z или, другими словами, плотность заряда. Соответственно компоненты $(s_1\ s_2\ s_3)$ выражают плотность тока, а уравнение (5.38) — закон сохранения электричества.

Если мы обратимся теперь к диференциальным уравнениям второго порядка, то из них будет следовать существование законов сохранения, которые можно будет интерпретировать как законы сохранения энергии и импульса.

Выпишем систему диференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{array}{ll}\left\{D_{\rho\dot\mu}D^{\rho\dot\mu}-\frac{1}{\lambda_0^2}\right\}\xi_\sigma=-if_{\sigma\lambda}\xi^\lambda & \Big|\; -\xi_{\dot\rho}\\ \left\{D_{\rho\dot\mu}D^{\rho\dot\mu}-\frac{1}{\lambda_0^2}\right\}\eta_\sigma=if_{\sigma\mu}\eta^\mu & \Big|\; \eta_{\dot\rho}\end{array}$$

и к ним комплексно-сопряженные:

$$\begin{array}{ll}\left\{D^*_{\rho\dot\mu}D^{*\rho\dot\mu}-\frac{1}{\lambda_0^2}\right\}\xi_{\dot\rho}=if_{\dot\rho\dot\lambda}\xi^{\dot\lambda} & \Big|\; \xi_\sigma\\ \left\{D^*_{\rho\dot\mu}D^{*\rho\dot\mu}-\frac{1}{\lambda_0^2}\right\}\eta_{\dot\rho}=-if_{\dot\rho\dot\mu}\eta^{\dot\mu} & \Big|\; -\eta_\sigma\end{array}$$

где

$$D^*_{\rho\dot\mu}=\partial_{\rho\dot\mu}-i\Phi_{\rho\dot\mu}.$$

Помножим их на стоящие рядом величины и сложим. Мы получим, обозначая через T оператор $D_{\rho\dot\mu}D^{\rho\dot\mu}$:

$$\{\xi_\sigma T\xi_{\dot\rho}-\xi_{\dot\rho}T^*\xi_\sigma\}-\{\eta_\sigma T\eta_{\dot\rho}-\eta_{\dot\rho}T^*\eta_\sigma\}=$$
$$=i\,\{f_{\sigma\lambda}(\xi^\lambda\xi_{\dot\rho}+\eta^\lambda\eta_{\dot\rho})+f_{\dot\rho\dot\lambda}(\xi^{\dot\lambda}\xi_\sigma+\eta^{\dot\lambda}\eta_\sigma)\}.$$

Вспоминая физическое значение величины $\xi^\lambda\xi_{\dot\rho}+\eta^\lambda\eta_{\dot\rho}=s^\lambda_{\dot\rho}$, мы получаем в правой части выражение для четырехмерной силы Лоренца, действующей на дираковский ток. Покажем теперь, что выражение в левой части можно преобразовать.

Имеем:

$$\xi_\sigma D_{\lambda\dot\mu}\xi_{\dot\rho}=(\partial_{\lambda\dot\mu}+i\Phi_{\lambda\dot\mu})\,\xi_{\dot\rho}=\partial_{\lambda\dot\mu}(\xi_\sigma\xi_{\dot\rho})-\xi_{\dot\rho}\partial_{\lambda\dot\mu}\xi_\sigma+i\Phi_{\lambda\dot\mu}\xi_\sigma\xi_{\dot\rho},$$

и следовательно:

$$\xi_\rho D_{\lambda\dot\mu}\xi_{\dot\rho}=-\xi_{\dot\rho}D^*_{\lambda\dot\mu}\xi_\sigma+\partial_{\lambda\dot\mu}(\xi_\sigma\xi_{\dot\rho}),\qquad(5.40)$$

$$\xi_{\dot\rho}D_{\lambda\dot\mu}\xi_\sigma=-\xi_\sigma D^*_{\lambda\dot\mu}\xi_{\dot\rho}+\partial_{\lambda\dot\mu}(\xi_\sigma\xi_{\dot\rho}).\qquad(5.41)$$

Заменяя в (5.40) $\xi_{\dot\rho}$ через $D^{\lambda\dot\mu}\xi_{\dot\rho}$ и в (5.41) ξ_σ через $D^{*\lambda\dot\mu}\xi_\sigma$, получим:

$$\xi_\sigma T\xi_{\dot\rho}-\xi_{\dot\rho}T^*\xi_\sigma=\partial_{\lambda\dot\mu}\{(\xi_\sigma D^{\lambda\dot\mu}\xi_{\dot\rho})-(\xi_{\dot\rho}D^{*\lambda\dot\mu}\xi_\sigma)\}\qquad(5.42)$$

и аналогично для η_σ и $\eta_{\dot\rho}$.

Обозначая через $t^{\lambda\dot{\mu}}_{\sigma\dot{\rho}}$ спинтензор энергии импульса дираковского поля

$$t^{\lambda\dot{\mu}}_{\sigma\dot{\rho}} = {}^{*}{}_{\sigma}D^{\lambda\dot{\mu}}\xi_{\dot{\rho}} - \xi_{\dot{\rho}}D^{*\lambda\dot{\mu}}\xi_{\sigma} - \eta_{|\sigma}D^{\lambda\mu}\eta_{|\dot{\rho}} + \eta_{|\dot{\rho}}D^{*\lambda\mu}\eta_{|\sigma},$$

мы получим закон сохранения энергии и импульса:

$$\partial_{\lambda\mu}\, t^{\lambda\dot{\mu}}_{\sigma\dot{\rho}} = f_{\sigma\lambda}s^{\lambda}_{\dot{\rho}} + f_{\dot{\rho}\dot{\lambda}}s^{\dot{\lambda}}_{\sigma}\,, \tag{5.43}$$

по форме аналогичный закону сохранения энергии и импульса электромагнитного поля.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

СПИНИНВАРИАНТЫ

В приложении спинорного анализа к квантовой теории химической валентности приобретают фундаментальное значение полиномы, составленные из компонент системы спиноров

$$P(\xi_i \eta_i \, \xi_k^* \eta_k^*) \qquad \begin{pmatrix} 1 < i < n, \\ n+1 < k < n+n' \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

остающихся инвариантными при бинарных преобразованиях. Во всей этой главе мы будем обозначать спиноры жирной латинской буквой $\mathbf{x}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{l}$, а их обе компоненты — различными греческими буквами, например $\mathbf{x} = (\xi, \eta)$, $\mathbf{a} = (\alpha, \beta)$, $\mathbf{l} = (\lambda, \mu)$. Индексы у компонент обозначают номер рассматриваемого спинора, например $\mathbf{x}_i = (\xi_i, \eta_i)$. Докажем основную теорему:

«Инвариантный полином системы спиноров может быть всегда представлен как произведение скобок вида

$$[\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_{i'}] \, [\mathbf{y}_k^*, \mathbf{y}_{k'}^*].$$

Составим однородный полином $P(\xi_i \eta_i \xi_k^* \eta_k^*)$ степени v из спиноров $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ и степени v' из спиноров $\mathbf{x}_{n+1}^*, \mathbf{x}_{n+2}^*, \ldots, \mathbf{x}_{n+n'}^*$ и предположим, что он остается инвариантным при бинарном преобразовании.

Специальная бинарная трансформация A

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}^* = \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^*} \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

оставляет этот полином инвариантным. Но это возможно лишь в случае, если каждый член полинома переходит в самого себя.

Так как все ξ_i помножаются на a, все η_i на $\frac{1}{a}$, все ξ_k^* на a^* и все η_k^* на $\frac{1}{a^*}$, то это возможно лишь в том случае, если степень каждого члена в ξ_i равна степени этого члена в η_i и степень каждого члена в ξ_k^* равна степени этого члена в η_k^*. Поэтому обе эти степени могут быть лишь четными.

Введем два произвольных спинора $\mathbf{a}=(a_1a_2)$ и $\mathbf{b}=(b_1b_2)$ и выберем, что всегда возможно, специальную систему координат, для которой

$$\mathbf{a}=(\bar{a}_1, 0), \quad \mathbf{b}=(0, \bar{b}_2). \tag{6.3}$$

Величины в этой системе координат будем обозначать черточками. С помощью этих спиноров образуем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} p_i &= a_1\xi_i + a_2\eta_i, \\ p_k^* &= a_1^*\xi_k^* + a_2^*\eta_k^*, \\ q_i &= b_1\xi_i + b_2\eta_i, \\ q_k^* &= b_1^*\xi_k^* + b_2^*\eta_k^* \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

и рассмотрим полином $P(p_iq_ip_k^*q_k^*)$, полученный из нашего заменой

$$\xi_i \to p_i, \quad \eta_i \to q_i, \quad \xi_k^* \to p_k, \quad \eta_k^* \to q_k. \tag{6.5}$$

В нашей специальной системе координат мы будем иметь соотношение:

$$P(\bar{p}_i\bar{q}_i\bar{p}_k^*\bar{q}_k^*) = (\bar{a}_1\bar{b}_2)^v(\bar{a}_1^*\bar{b}_2^*)^{v'}P(\bar{\xi}_i\bar{\eta}_i\bar{\xi}_k^*\bar{\eta}_k^*), \tag{6.6}$$

которое при возвращении к первоначальной системе координат примет вид:

$$P(p_iq_ip_k^*q_k^*) = [\mathbf{ab}]^v[\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*]^{v'}P(\xi_i\eta_i\xi_k^*\eta_k^*). \tag{6.7}$$

Введем теперь два оператора:

$$\Omega = \frac{\partial^2}{\partial a_1\partial b_2} - \frac{\partial^2}{\partial a_2\partial b_1}, \quad \Omega^* = \frac{\partial^2}{\partial a_1^*\partial b_2^*} - \frac{\partial^2}{\partial a_2^*\partial b_1^*} \tag{6.8}$$

и подействуем ими на произведения $p_iq_i, p_k^*q_k^*$.

Получим

$$\left.\begin{aligned}\Omega(a_1\xi_i+a_2\eta_i)(b_1\xi_{i'}+b_2\eta_{i'})p_k^*q_{k'}^* &= (\eta_{i'}\xi_i-\eta_i\xi_{i'})p_k^*q_{k'}^*,\\ \Omega^* p_i q_{i'}(a_1^*\xi_k+a_2^*\eta_k)(b_1^*\xi_{k'}^*+b_2^*\eta_k^*) &= p_i q_{i'}(\eta_k^*\xi_k^*-\eta_k^*\xi_{k'}^*)\end{aligned}\right\}\quad(6.9)$$

или сокращенно:

$$\Omega p_i q_{i'} p_k^* q_{k'}^* = [\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{i'}]\,p_k^* q_{k'}^*$$
$$\Omega^* p_i q_{i'} p_k^* q_{k'}^* = p_i q_{i'}\,[\mathbf{x}_k^*\mathbf{x}_{k'}^*].$$

Подействуем теми же операторами на $[\mathbf{ab}]^v$ и $[\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*]^{v'}$ и получим:

$$\left.\begin{aligned}\Omega[\mathbf{ab}]^v &= v(v+1)[\mathbf{ab}]^{v-1},\\ \Omega^*[\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*]^{v'} &= v'(v'+1)[\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*]^{v'-1}.\end{aligned}\right\}\quad(6.10)$$

Если мы теперь подействуем на равенство (6.7) v раз оператором Ω и v' раз оператором Ω^*, мы получим слева полином из скобок вида $[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{i'}][\mathbf{x}_k^*\mathbf{x}_{k'}^*]$, а справа выражение: $v!\,(v+1)!\;v'!\,(v'+1)!\;P(\xi_i\eta_{i'}\xi_k\eta_{k'})$, откуда и следует основная теорема.

Мы запишем инвариант в виде:

$$I=[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2]^{p_{12}}[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3]^{p_{13}}\ldots[\mathbf{x}_{n+1}^*\mathbf{x}_{n+2}^*]^{p'_{12}}\ldots\quad(6.11)$$

или сокращенно:

$$I=\Pi\,[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{i'}]^{p_{ii'}}[\mathbf{x}_k^*\mathbf{x}_{k'}^*]^{p_{kk'}}\ldots,$$

где умножение распространяется на все неравные друг другу пары индексов i, i' и k, k'.

Следующие суммы дают степени инварианта I в спинорах $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ и спинорах $\mathbf{x}_{n+1}^*, \mathbf{x}_{n+2}^*, \ldots, \mathbf{x}_{n+n'}^*$:

$$\left.\begin{aligned}&p_{12}+p_{13}+\ldots+p_{1i}+\ldots=v_1,\\ &p_{21}+p_{23}+\ldots\qquad\qquad=v_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &p_{n1}+\ldots\qquad\quad p_{ni}=v_n.\end{aligned}\right\}\quad(6.12)$$

$$\left.\begin{aligned}&p'_{12}+p'_{13}+\ldots=v'_1,\\ &p'_{21}+\qquad\ldots=v'_2,\\ &p'_{n'1}+\qquad\ldots=v'_{n'}.\end{aligned}\right\}\quad(6.12a)$$

Совокупность чисел $(v_1 v_2 \ldots v_n \| v_1' v_2' \ldots v_{n'}')$ мы будем, принимая во внимание приложения теории спининвариантов к проблеме химической валентности, называть валентностью инварианта I. Для того чтобы из системы n спиноров $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ и n' спиноров $\mathbf{x}_{n+1}^*, \ldots, \mathbf{x}_{n+n'}^*$ составить инвариант заданной валентности $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, достаточно, очевидно, решить системы уравнений (6.12) и (6.12a) в целых, неотрицательных числах. Каждая система решений $(p_{ii'}, p_{kk'})$ даст нам инвариант I_s системы спиноров заданной валентности. Число различных инвариантов равно, очевидно, числу различных решений системы (6.12) и (6.12a).

Заметим, что, обозначая через I_s' $(s=1, 2, 3, \ldots, h')$ систему инвариантов валентности $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, построенную для системы спиноров $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, и через I_σ'' $(\sigma=1, 2, \ldots, h'')$ систему инвариантов валентности $(v_1', v_2', \ldots, v_{n'}')$, построенную для системы спиноров $\mathbf{x}_{n+1}^*, \mathbf{x}_{n+2}^*, \ldots, \mathbf{x}_{n+n'}^*$, мы получим полную систему $h=h' \cdot h''$ инвариантов вида:

$$I = I_s' \cdot I_\sigma''.$$

Пример.

Система спиноров	Валентность	Полная система инвариантов
$\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \mathbf{x}_3\ \mathbf{x}_4$	$(1,\ 1,\ 1,\ 1)$	
$\mathbf{x}_5^*\ \mathbf{x}_6^*$	$(1,\ 1)$	
$I_1' = [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2]\,[\mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4]$		$I_1 = I_1' I_1''$
$I_2' = [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_3]\,[\mathbf{x}_4 \mathbf{x}_2]$		$I_2 = I_2' I_1'$
$I_3' = [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_4]\,[\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3]$		$I_3 = I_3' I_1'$
$I_1'' = [\mathbf{x}_5^* \mathbf{x}_6^*]$		

Мы можем поэтому ограничиться рассмотрением теории инвариантов бинарной группы

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

вместо того чтобы рассматривать инварианты обеих групп

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \sigma^* = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}.$$

СИСТЕМА ИНВАРИАНТОВ (БАЗИС)

Как мы убедились на предыдущем примере, можно составить несколько инвариантов, содержащих компоненты спиноров в степени $(v_1\ v_2\ \dots\ v_n)$.

Возникает вопрос, являются ли все подобные инварианты линейно независимыми или нет.

Систему, состоящую из $h+1$ инвариантов $I_1,\ I_2,\ \dots\ I_h,\ I_{h+1}$ одной и той же валентности $(v_1\ v_2\ \dots\ v_n)$, мы называем линейно независимой, если равенство

$$a_1 I_1 + a_2 I_2 + \dots + a_h I_h + a_{h+1} I_{h+1} = 0 \tag{6.13}$$

удовлетворяется лишь в том случае, если все коэфициенты $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_h,\ a_{h+1}$ равны нулю. В этом случае система инвариантов образует h-мерный линейный базис, т. е. любой другой инвариант I той же валентности $(v_1\ v_2\ \dots\ v_n)$ выражается линейно через элементы базиса

$$I = c_1 I_1 + c_2 I_2 + \dots + c_h I_h.$$

Обратимся к нашему примеру. Легко убедиться в том, что инварианты

$$I_1 = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2][\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3][\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4],$$
$$I_2 = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4][\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3]^2,$$
$$I_3 = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3][\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3][\mathbf{x}_4\mathbf{x}_2].$$

линейно зависимы.

В самом деле,

$$I_1 + I_2 + I_3 = [\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3]\left\{[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2][\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4] + [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4][\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3] + [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3][\mathbf{x}_4\mathbf{x}_2]\right\}.$$

Но выражение, стоящее в фигурных скобках, тождественно равно нулю, как легко убедиться непосредственно вычислением.

Это показывает, что система инвариантов валентности (1, 2, 2, 1) образует двумерный базис I_1, I_2, а третий инвариант есть линейная комбинация двух первых:

$$I_3 = -I_1 - I_2.$$

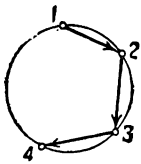
НАХОЖДЕНИЕ БАЗИСА ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНВАРИАНТОВ

Простое геометрическое построение дает возможность найти систему независимых инвариантов данной валентности. На окружности поместим ряд точек $1, 2, \ldots, n$ и будем их соединять попарно черточками, снабженными стрелками, так, чтобы точка 1 соединялась с другими точками при помощи v_1 штрихов, точка 2 — при помощи v_2 штрихов и т. д.

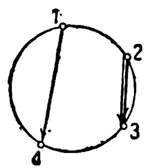
Если мы каждой стрелке от i к k отнесем скобку $[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_k]$, то мы тем самым каждому инварианту I отнесем некоторую схему штрихов, которую назовем валентной схемой инварианта.

Например:

$$I_1 = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2][\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3][\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4], \qquad I_2 = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4][\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3]^2.$$



Черт. 2

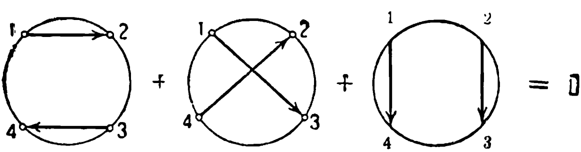


Черт. 3

Покажем теперь, что каждый инвариант, валентная схема которого содержит перекрещивающиеся штрихи, может быть представлен как линейная комбинация инвариантов, валентная схема которых не содержит перекрещивающихся штрихов.

Для доказательства запишем в виде валентных схем тождество:

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2][\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4] + [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3][\mathbf{x}_4\mathbf{x}_2] + [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4][\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3] = 0. \qquad (6.14)$$



Черт. 3

Это показывает, что если в схеме два штриха перекрещиваются, то ее можно представить как сумму двух схем, в которых перекрещивание отсутствует. Конечно, при этом могут появиться новые перекрещивания, отсутствующие в старой схеме. Все же, продолжая при помощи (6.14) процесс разложения схем на два слагаемых, мы в результате получим сумму схем, в которых перекрещивание отсутствует.

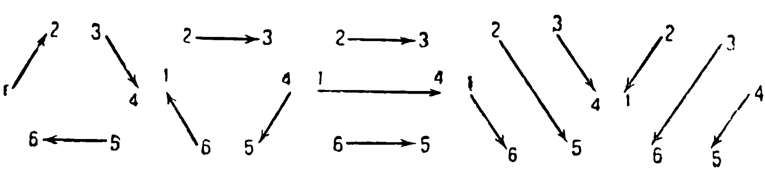
Характер процесса станет ясным из приведенного выше примера.

Для доказательства назовем каждую из дуг ik в случае, если штрих соединяет точки i и k, валентной дугой. Длиной валентной дуги назовем число лежащих на ней точек схемы, причем конечные точки i и k считаются каждая за половину. Если дуга ik не содержит других точек, то ее длина равна, очевидно, единице.

Разберем два случая. 1) Если в схеме I встречается дуга ik длиной единица, то мы ее выбрасываем и получаем инвариант I' (другой, меньшей валентности). Предположим, что для инвариантов I' наша теорема верна. Мы можем тогда составить I' из инвариантов $I'_1, I'_2, \ldots, I'_{h'}$, схемы которых не содержат перекрещивания. Вписав затем во все эти схемы штрих $[ik]$, мы получим наш исходный инвариант как линейную комбинацию неперекрещивающихся схем.

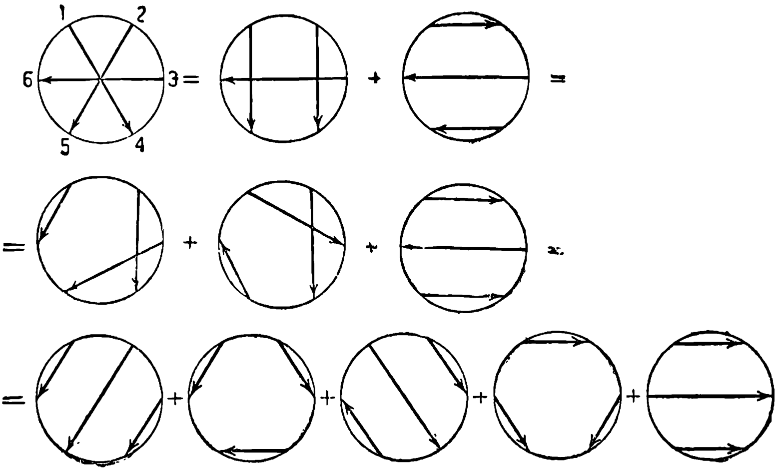
2) Пусть I не содержит дуги длиной единица. Пусть ik — дуга кратчайшей длины. На этой дуге лежит по крайней мере еще одна точка j. Штрих, идущий от j, необходимо должен пересекать штрих ik, иначе дуга ik не была бы кратчайшей. Это перекрещивание мы можем разложить по схеме (6.14). Две новых схемы будут содержать дуги: первая ji и вторая jk, обе с длиной, меньшей, чем исходная дуга ik. Продолжая таким образом, мы придем к дугам длиной единица и будем иметь перед собой первый случай.

Для примера рассмотрим построение базиса для инвариантов спиноров $\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \mathbf{x}_3\ \mathbf{x}_4\ \mathbf{x}_5\ \mathbf{x}_6$ валентности (1, 1, 1, 1, 1, 1).



Черт. 4

Схему инварианта $[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4]\,[\mathbf{x}_2\mathbf{x}_5]\,[\mathbf{x}_3\mathbf{x}_6]$, соответствующий схеме, можно следующим образом представить в виде линейной комбинации независимых схем:



Черт. 5

В предыдущем параграфе мы показали, что каждая схема, соответствующая инварианту I заданной валентности $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, может быть представлена как суперпозиция схем с неперекрещивающимися штрихами. Нашей задачей является теперь доказать, что все инварианты, соответствующие схемам с неперекрещивающимися штрихами, являются линейно независимыми. Мы докажем это, если убедимся, что число неперекрещивающихся схем совпадает с числом независимых инвариантов.

Займемся сперва получением числа неперекрещивающихся схем заданной валентности и выведем рекурсионную формулу, выражающую число неперекрещивающихся схем валентности $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1})$ через число неперекрещивающихся схем валентности $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Рассмотрим неперекрещивающуюся схему S_{n+1} валентности $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1})$. Пусть точки схемы перенумерованы числами 1, 2, 3,... Допустим, что точки n и $n+1$ соединяют r штрихов. Это значит, что с остальными точками схемы точка n соединена $v_n - r$ штрихами, а точка $n+1$ соединена

$v_{n+1}-r$ штрихами. Уничтожим r штрихов, соединяющих точки n и $n+1$, и заставим точку $n+1$ совпасть с точкой n. Мы получим опять неперекрещивающуюся схему S_n валентности $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Обозначая через $N(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ число неперекрещивающихся схем, мы получаем следующую рекурсионную формулу:

$$\begin{aligned}
N(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}) = {} & N(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n + v_{n+1}) + \\
& + N(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n + v_{n+1} - 2) + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + N(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, |v_n - v_{n+1}|) = \\
& = \sum_{r=0}^{r=v} N(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n + v_{n+1} - 2r), \qquad (6.14)
\end{aligned}$$

где v равно наименьшему из чисел v_{n+1} и v_n.

Покажем, что если мы через $N(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ обозначили число независимых инвариантов валентности $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, то эта же формула определит число независимых инвариантов заданной валентности. Рассмотрим систему n полиспиноров:

$$\begin{gathered}
\mathbf{x}_1^{v_1}\ \mathbf{x}_1^{v_1-1}\ \mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_1^{v_1}, \\
\mathbf{x}_2^{v_2}\ \mathbf{x}_2^{v_2-1}\ \mathbf{y}_2 \ldots \mathbf{y}_2^{v_2}, \\
\mathbf{x}_n^{v_n}\ \mathbf{x}_n^{v_n-1}\ \mathbf{y}_n \ldots \mathbf{y}_n^{v_n}.
\end{gathered}$$

Величины каждой строки трансформируются по $\boldsymbol{D}_{v_1,0}$, $\boldsymbol{D}_{v_2,0}$.

Нашей задачей является определить число линейных комбинаций из произведений компонент этих полиспиноров, которые трансформируются по $\boldsymbol{D}_{0,0}$, т. е. являются инвариантами.

Для двух полиспиноров $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ мы получаем по формуле Клебша-Гордана различные линейные комбинации, трансформирующиеся по

$$\boldsymbol{D}_{v_1+v_2, 0}, \boldsymbol{D}_{v_1+v_2-2, 0}, \ldots, \boldsymbol{D}_{|v_1-v_2|, 0}.$$

Среди них будет иметься лишь один инвариант в том случае, если $v_1 = v_2$, т. е.

$$N(v_1, v_2) = \delta v_1 v_2.$$

Для трех спиноров валентности (v_1, v_2, v_3) мы получаем линейные комбинации, которые трансформируются по

$$D_{(v_1+v_2-2r)+(v_3-2s),\,0},$$

причем

$r=0, 1, 2, \ldots, \bar{v}$, где $\bar{v}$ наименьшее из чисел v_1 и v_2,

$s=0, 1, 2, \ldots, \bar{\bar{v}}$, » $\bar{\bar{v}}$ » » » v_3 и $|v_1-v_2|$.

Среди них будут инварианты всякий раз, когда

$$v_1+v_2-2r=v_3-2_3 \quad \text{или} \quad v+v_2-2(r-s)=v_3.$$

Число инвариантов, т. е. величин, трансформирующихся по $D_{0,0}$, будет, очевидно:

$$N(v_1, v_2, v_3)=N(v_1+v_2, v_3)+N(v_1+v_2-2, v_3)+\ldots=$$

$$=\sum_{r=0}^{r=v} N(v_1+v_2-2r, v_3),$$

где v — наименьшее из чисел v_1 и v_2. Переходя от трех спиноров к четырем, пяти и т. д., мы убеждаемся в справедливости формулы (6.14) для любого числа независимых инвариантов, и наша задача решена.

ОПЕРАЦИИ С ИНВАРИАНТАМИ

Пусть мы имеем инвариант I валентности $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Напишем его в виде произведения скобок:

$$I=[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2]^{p_{12}}[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3]^{p_{13}}]\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3]^{p_{23}}.$$

Скобку $[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2]$ выпишем p_{12} раз подряд, скобку $[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3]$ выпишем p_{13} раз подряд и т. д. Мы получим произведение $p=p_{12}+p_{13}+\ldots$ скобок, причем спинор $\mathbf{x}_1$ будет встречаться v_1 раз, спинор $\mathbf{x}_2$ встречаться v_2 раз и т. д. Перенумеруем спиноры $\mathbf{x}_1$ числами от 1 до v_1, спиноры $\mathbf{x}_2$ числами от 1 до v_2 и т. д. Очевидно, что, произведя любую транспозицию спиноров $\mathbf{x}_1^s$ и $\mathbf{x}_2^\sigma$, мы получим новый инвариант той же валентности или нуль. Последнее — в том случае, если в скобку попадает после транспозиции два одинаковых спинора. Например:

$$T_{x_1 x_2^2}[\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2^1][\mathrm{x}_2^2\mathrm{x}_3^1][\mathrm{x}_3^2\mathrm{x}_4]=[\mathrm{x}_2^2\mathrm{x}_2^1][\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3^1][\mathrm{x}_3^2\mathrm{x}_4]\equiv 0,$$

$$T_{x_2^1 x_3^2}[\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2^1][\mathrm{x}_2^2\mathrm{x}_3^1][\mathrm{x}_3^2\mathrm{x}_4]=[\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3^2][\mathrm{x}_2^2\mathrm{x}_3^1][\mathrm{x}_2^1\mathrm{x}_4]\neq 0,$$

так как $\mathrm{x}_2^1\equiv\mathrm{x}_2^2$. Кроме операции $T_{x_i^s x_k^\sigma}$, определяющей транспозицию s-го спинора с σ-м спинором x_k, определим операцию

$$T_{ik}=\sum_{s,\sigma} T_{x_i^s x_k^\sigma}\quad \left.\begin{aligned}1\leqslant s\leqslant v_i,\\ 1\leqslant \sigma\leqslant v_k.\end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

Эта операция означает сумму транспозиций каждого из спиноров x_i с каждым из спиноров x_k.

Например:

$$T_{x_1x_2}[\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2][\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3][\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4]=[\mathrm{x}_2\mathrm{x}_1][\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3][\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4]+[\mathrm{x}_2\mathrm{x}_1][\mathrm{x}_1\mathrm{x}_3][\mathrm{x}_3\mathrm{x}_4].$$

Поскольку мы каждую перестановку можем осуществить при помощи составляющих ее транспозиций, мы можем высказать следующее положение. Оператор перестановок переводит инвариант I данной валентности в инвариант той же валентности.

Пользуясь понятием линейного базиса системы инвариантов, мы можем записать это положение в виде:

$$PI_\sigma=a_{\sigma 1}I_1+a_{\sigma 2}I_2+\ldots a_{\sigma h}I_h, \tag{6.16}$$

т. е. инвариант, полученный при действии оператора перестановкой на один из элементов «базиса», является линейной комбинацией элементов базиса. Пусть система состоит из n спиноров. Группа перестановок содержит тогда $n!$ членов:

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n!}.$$

Мы можем составить из $n!$ операторов P_i линейный оператор

$$\sum_{s=1}^{s=n!} a_s P_s, \tag{6.17}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n!}$ — система чисел. Очевидно, что и этот оператор оставляет валентность инварианта неизменной.

Особую роль играют три оператора:

1) $$a_i = 1.$$

Оператор $\sum\limits_s P_s$ называется симметризирующим оператором. Действуя им на любую функцию, мы получаем функцию симметричную во всех переменных.

2) $$a_i = \delta_i,$$

где $\delta_i = 1$ при четной перестановке и $\delta_i = -1$ при перестановке нечетной. Оператор $\Sigma\, \delta_P P$ называется антисимметризирующим оператором. Действуя им на любую функцию, мы получаем функцию антисимметричную во всех переменных.

Пример. Группа перестановок из трех элементов состоит из шести перестановок: (123), (231), (312) (четных) и (132), (321), (213) (нечетных).

$$\begin{aligned}\sum P\psi(123) &= \psi(123)+\psi(231)+\psi(312)+\psi(132)+\\ &\quad+\psi(321)+\psi(213),\\ \sum \delta_P P\psi(123) &= \psi(123)+\psi(231)+\psi(312)-\psi(132)-\\ &\quad-\psi(321)-\psi(213).\end{aligned}$$

Особое значение имеет в теории валентности оператор типа $\Sigma\, a_P P$, состоящий из одних транспозиций

3) $$\mathrm{B} = A_{12}T_{12} + A_{13}T_{13} + \ldots = \Sigma\, A_{ik}T_{ik},$$

где $A_{12}, A_{13}, \ldots$ — постоянные числа.

СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ И СОБСТВЕННЫЙ ИНВАРИАНТ

Мы видим, что оператор типа $\Sigma\, a_P P$ и инвариант I находятся в том же соответствии, как матрица А и вектор **x**. Действуя оператором $\Sigma\, a_P P$ на инвариант I, мы получаем линейную композицию h инвариантов базиса:

$$\sum_P a_P P I = a_1 I_1 + a_2 I_2 + \ldots + a_f I_f. \tag{6.18}$$

Мы можем, следовательно, пользоваться в h-мерном пространстве системы инвариантов основными понятиями линейной векторной алгебры.

Мы можем специально назвать собственным инвариантом оператора $\Sigma a_P P$ инвариант, который при действии на него этого оператора помножается на постоянное число λ, соответствующее собственному значению оператора

$$\sum a_P PI = \lambda I. \tag{6.19}$$

Укажем путь для нахождения собственных инвариантов, несколько отличающийся, но по существу совпадающий с тем, который применяется в векторной алгебре.

Подействуем оператором $\Sigma a_P P$ последовательно на все инварианты базиса $I_1, I_2, \ldots, I_h$. Мы будем иметь:

$$\sum a_P PI_1 = a_{11} I_1 + a_{12} I_2 + \ldots a_{1h} I_h,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sum a_P PI_h = a_{h1} I_1 + a_{h2} I_2 + \ldots + a_{hh} I_h.$$

Помножим все эти уравнения последовательно на числа $c_1, c_2, \ldots, c_h$ и сложим, причем подберем $c_1, c_2, \ldots, c_h$ так, чтобы $c_1 I_1 + c_2 I_2 + \ldots c_h I_h$ был собственным инвариантом. Имеем:

$$\begin{aligned}\sum a_P P(c_1 I_1 + \ldots c_h I_h) &= \\ = (c_1 a_{11} + \ldots + c_h a_{1h}) I_i + (c_1 a_{21} + \ldots + c_h a_{2h}) I_2 &= \\ = \lambda (c_1 I_1 + c_2 I_2 + \ldots c_h I_h).\end{aligned}$$

Коэфициенты при I_s должны быть равны друг другу, т. е.

$$\left.\begin{aligned} c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + \ldots c_h a_{h1} &= \lambda c_1, \\ c_1 a_{12} + c_2 a_{22} + \ldots c_h a_{h2} &= \lambda c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ c_1 a_{1h} + c_2 a_{2h} + \ldots c_h a_{hh} &= \lambda c_h, \end{aligned}\right\} \tag{6.20}$$

откуда получаем для определения множителей c_i обычное вековое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & a_{h1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \ldots & a_{h2} \\ a_{1h} & & \ldots a_{hh} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{6.21}$$

дающее нам h собственных решений и, им соответствующие, — собственных векторов.

Пример: $I_1 = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2][\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4]$, $I_2 = [\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3][\mathbf{x}_2\mathbf{x}_4]$.

Базис будет двумерным. Найдем собственные значения операторов $T_{12} + T_{34}$ и $T_{13} + T_{24}$:

$$\begin{array}{rcl} T_{12}I_1 = -I_1 & \quad & T_1\ I_2 = I + I_2 \\ T_{34}I_1 = -I_1 & & T_{34}I_2 = I + I_2 \\ \hline (T_{12}+T_{34})I_1 = -2I_1 & & (T_{12}+T_{34})I_2 = 2(I_1+I_2) \end{array}$$

Вековое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

дает $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = +2$. Соответствующие собственные инварианты будут:

$$\begin{array}{llll} \multicolumn{2}{c}{\text{для } \lambda = -2} & \multicolumn{2}{c}{\text{для } \lambda = 2} \\ I_{(-2)} & = I_1 & I_2 & = I_1 + 2I_2 \\ T_{13}I_1 & = I_1 + I_2 & T_{13}I_2 & = -I_4 \\ T_{24}I_1 & = I_1 + I_2 & T_{24}I_2 & = -I_2 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{(T_{13}+T_{24})I_1 = 2(I_1+I_2)} & \multicolumn{2}{l}{(T_{13}+T_{24})I_2 = -2I_2} \end{array}$$

Вековое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

дает

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2.$$

Соответствующие собственные инварианты будут для $\lambda = 2$:

$$I_{(+2)} = I_2, \quad I_{(-2)} = I_2 + 2I_1.$$

Вычисление операции T_{ik} значительно облегчается тем, что оператор T_{ik} может быть представлен в виде:

$$T_{is} = (D_{ik}D_{ki} - v_i), \tag{6.22}$$

де D_{ik} — диференциальный оператор, действующий непосредтвенно на скобки, из которых состоит инвариант.

Представим себе все умножения скобок в инварианте выполненными. Тогда I представится суммой таких членов:

$$\Phi = \xi_i^p \eta_i^q \xi_k^r \eta_k^s,$$

где $p + q = v_i$, $r + s = v_k$.

Заменить спинор $\mathbf{x}_i$ спинором $\mathbf{x}_k$ значит заменить в Φ

$$\xi_i \xi_k \quad \xi_i \eta_k \quad \eta_i \xi_k \quad \eta_i \eta_k$$

через

$$\xi_k \xi_i \quad \xi_k \eta_i \quad \eta_k \xi_i \quad \eta_k \eta_i.$$

Это возможно столькими способами, сколько возможно составить пар первого ряда из Φ, т. е. равно

$$pr, \ ps, \ qr, \ qs.$$

В результате всех этих операций замещения (делить на член верхнего ряда и множить на член нижнего ряда) получим:

$$\begin{aligned} T_{ik} \Phi &= \left\{ pr \frac{\xi_k \xi_k}{\xi_i \xi_k} + ps \frac{\xi_k \eta_i}{\xi_i \eta_k} + qr \frac{\eta_k \xi_i}{\eta_i \xi_k} + qs \frac{\eta_k \eta_i}{\eta_i \eta_k} \right\} \Phi = \\ &= \left\{ p \frac{\xi_k}{\xi_i} + q \frac{\eta_k}{\eta_i} \right\} \left\{ r \frac{\xi_i}{\xi_k} + s \frac{\eta_i}{\eta_k} \right\} \Phi. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Легко простым диференцированием убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\left(\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_k} + \eta_i \frac{\partial}{\partial \eta_k} \right) \Phi = \left(r \frac{\xi_i}{\xi_k} + s \frac{\eta_i}{\eta_k} \right), \tag{6.24}$$

$$\left(\xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \eta_k \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \Phi = \left(p \frac{\xi_k}{\xi_i} + q \frac{\eta_k}{\eta_i} \right). \tag{6.24'}$$

Обозначая

$$\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_k} + \eta_i \frac{\partial}{\partial \eta_k} \text{ через } D_{ik},$$

$$\xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_i} + \eta_k \frac{\partial}{\partial \xi_i} \text{ через } D_{ki},$$

имеем:

$$\begin{aligned} D_{ik} D_{ki} \Phi &= D_{ik} \left(p \frac{\xi_k}{\xi_i} + q \frac{\eta_k}{\eta_i} \right) \Phi = \\ &= \Phi D_{ik} \left(p \frac{\xi_k}{\xi_i} + q \frac{\eta_k}{\eta_i} \right) + \left(p \frac{\xi_k}{\xi_i} + q \frac{\eta_k}{\eta_i} \right) D_{ik} \Phi. \end{aligned}$$

Но

$$D_{ik} \left(p \frac{\xi_k}{\xi_i} + q \frac{\eta_k}{\eta_i} \right) = p + q = v_i.$$

Поэтому имеем окончательно:

$$(D_{ik}D_{ki}-v_i)\,\Phi=\left(p\,\frac{\xi_k}{\xi_i}+q\,\frac{\eta_k}{\eta_i}\right)\left(r\,\frac{\xi_i}{\xi_k}+s\,\frac{\eta_i}{\eta_k}\right)\Phi=T_{ik}\,\Phi \tag{6.25}$$

или аналогично:

$$(D_{ki}D_{ik}-v_k)\,\Phi=T_{ki}\,\Phi=T_{ik}\,\Phi. \tag{6.25'}$$

Последние формулы остаются справедливыми, если мы возьмем вместо Φ сам вариант I.

Нам не надо производить умножение скобок в инварианте. Достаточно заметить, что оператор D_{ik} является линейным оператором, а потому для него справедливы все правила обычного диференцирования

$$D_{ik}(f+g)=D_{ik}f+D_{ik}g,$$
$$D_{ik}fg=gD_{ik}f+fD_{ik}g.$$

Для отдельных скобок следует заметить и запомнить следующие правила:

$$D_{ik}\,[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_k]=0,\quad D_{ik}\,(\mathbf{x}_k\mathbf{x}_j]=[\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j].$$

Обратим внимание, что D_{ik} содержит диференцирование по ξ_k', η_k. Поэтому скобка, не содержащая $\mathbf{x}_k$, не может быть вынесена за знак оператора.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ТЕОРИЯ СПИНВАЛЕНТНОСТИ

В нашу задачу не входит дать здесь обзор теории спинвалентности, которая изложена в соответствующей специальной литературе [1]. Отметим лишь следующие физические предпосылки теории.

1) Теория в принципе применима лишь к легким элементам (до неона).

2) Теория принимает следующую модель атома. Вокруг остова атома как вокруг ядра вращаются валентные электроны в числе, соответствующем валентности атома по отношению к водороду. Химическая связь обусловливается взаимодействием валентных электронов различных атомов. Взаимодействием валентных электронов с внутренними электронами атомов пренебрегается.

3) Теория ограничивается лишь атомами, у которых распределение зарядов, если отвлечься от влияния спина-электронов, обладает шаровой симметрией. Таковыми являются в нормальном состоянии атомы элементов: H, He, Li, Be, F, Ne и с известными оговорками C и N.

Не входит сюда атом кислорода, к которому теория спинвалентности неприменима.

4) Деформацией электрического заряда при сближении атомов друг с другом пренебрегают.

Эти ограничения в применимости теории сильно суживают физическую ценность теории. Это и понятно, что сложные системы, каковыми являются атомы, с трудом укладываются в общую алгебраическую схему.

Поэтому развитие квантовой химии за последние годы пошло по пути индивидуального изучения химического поведения отдель-

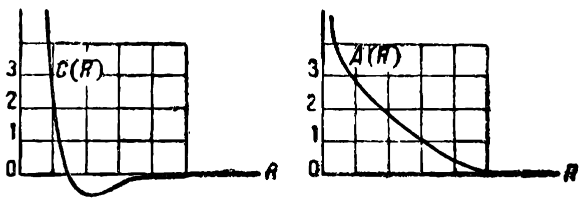
[1] См., например, Н. Борн, Квантовая механика и химическая связь, Мир., 1932.

ных атомов и отошло от методов теории спинвалентности, оставив за ней место общей логической схемы.

Сформулируем теперь математическую задачу, лежащую в основе теории спинвалентности.

Каждому атому A, B, $C, \ldots$, входящему в насыщенную молекулу, соответствует спинор $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Валентное состояние молекулы описывается спининвариантом I валентности $(v_a, v_b, v_c, \ldots)$, где $v_a, v_b, v_c, \ldots$ — числа валентных электронов соответствующих атомов. Число валентных состояний молекулы равно числу независимых инвариантов данной валентности.



Черт. 6

Энергия связи молекулы изображается оператором вида:

$$W = C \cdot 1 + A_{ab} T_{ab} + A_{ac} T_{ac} + \ldots,$$

где T_{ab} — определенный на стр. 92 оператор транспозиции, а C — так называемая диагональная энергия взаимодействия между атомами

$$C = C_{ab} + C_{ac} + C_{bc} + \ldots,$$

аддитивно слагающаяся из диагональных энергий взаимодействия между отдельными парами атомов. Она включает в себя:

1) кулоновское отталкивание между ядрами отдельных атомов,

2) кулоновское взаимодействие между размещенными по всему пространству зарядами валентных электронов отдельных атомов,

3) энергии взаимодействия между остовами отдельных атомов A_{ab} — это так называемая обменная энергия между отдельными атомами. Как C_{ab}, так и A_{ab} являются функциями расстояния R между атомами, быстро спадающими с увеличением R. Как C_{ab}, так и A_{ab} в принципе могут быть вычислены, если известны волновые функции отдельных атомов. Характер их зависимости

от R приведен на черт. 6. Произведенный для отдельных атомов (H_2, Li_2) расчет показал, что обе функции C_{ab} и A_{ab} положительны, причем $A_{ab} > C_{ab}$.

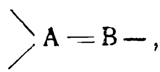
Возможные энергетические значения энергии связи находятся путем решения проблемы собственных значений

$$WI = \lambda I$$

в пространстве спининвариантов.

Число возможных энергетических значений равно числу независимых инвариантов данной валентности.

Если мы имеем дело со свободным радикалом, обладающим v_l ненасыщенными валентностями, например:



то мы вводим фиктивный атом L валентности v_l и рассматриваем насыщенную молекулу (A, B, C, . . . , L). Например:

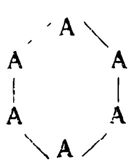
Математическая проблема остается той же самой, лишь в операторе энергии надо положить обменные энергии A_{al}, A_{bl}, . . . атомов с фиктивным атомом L, равным нулю.

СИММЕТРИЯ МОЛЕКУЛ

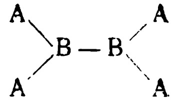
В случае, если молекула имеет симметрию, можно этим воспользоваться и редуцировать проблему собственных значений.

Пусть молекула (ABC . . . D) сохраняет свою форму при перестановке P группы атомов. Например:

1) Кольцо из идентичных атомов сохраняет свою форму при циклической перестановке атомов



2) Молекула



сохраняет свою форму при двух перестановках: перестановка группы левых A атомов и перестановка правых A атомов.

Пусть базис для молекулы $\{ABC\ldots D\}$ состоит из f инвариантов

$$I_1,\ I_2, \ldots,\ I_f.$$

Оператор W в этой системе инвариантов изобразится f-рядной матрицей

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \ldots & W_{1f} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ W_{f1} & & \ldots W_{ff} \end{pmatrix}.$$

Пусть молекула сохраняет свою форму при операции P.

Подействуем операцией P на систему инвариантов I и получим:

$$\begin{aligned} PI_1 &= P_{11}I_1 + P_{12}I_2 + \ldots P_{1f}I_f, \\ PI_2 &= P_{21}I_1 + \qquad\qquad \ldots P_{2f}I_f, \\ PI_f &+ P_{f1}I_1 + \qquad\qquad \ldots P_{ff}I_f. \end{aligned}$$

Операция P изобразится в системе инвариантов I, f-рядной матрицей

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \ldots & P_{1f} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ P_{f1} & & \ldots P_{ff} \end{pmatrix}.$$

Так как по условию операция P сохраняет форму молекулы, то

$$PWI = \lambda PI = WPI,$$

т. е. матрицы P и W перестановочны. Воспользуемся этим и выберем такой базис $I'_1, I'_2, \ldots, I'_f$, при котором матрица P будет диагональной. Из условия

$$PW - WP = 0, \quad P_{ij} = P_{ii}\delta_{ij}$$

получаем:

$$\sum_j (P_{ij}W_{jk} - W_{ij}P_{jk}) = W_{ik}(P_{ii} - P_{kk}),$$

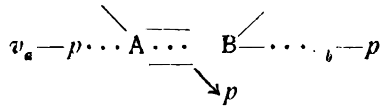
откуда следует, что при $P_{ii} \neq P_{kk}$, $W_{ik} = 0$, т. е. в системе базиса $I'_1, I'_2, \ldots, I'_f$ матрица W будет ступенчатой с числом ступеней, равным числу различных корней уравнения:

$$\begin{vmatrix} P_{11}-\lambda & P_{12} & \ldots P_{1f} \\ P_{21} & P_{22}-\lambda \ldots & \\ P_{f1} & & \ldots P_{ff}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Рассмотрим двухатомную молекулу AB, образованную v_a и v_b валентными атомами. Положим, что $v_a \geqslant v_b$.

Рассмотрим радикал



где p число валентных связей между атомами A и B. Для формулирования проблемы собственных значений нам нужно составить систему инвариантов системы спиноров **a**, **b**, **l** валентности $(v_a, v_b, v_a + v_b - 2p)$.

Единственный инвариант будет:

$$I = [\mathbf{ab}]^{v_a - p} [\mathbf{bl}]^{v_b - p} [\mathbf{ab}]^p.$$

Оператор энергии имеет вид:

$$\mathrm{W} = \mathrm{C} + A\mathrm{T} \quad (A = A_{ab}, \quad \mathrm{T} = T_{ab}).$$

Вычисление дает:

$$(\mathrm{C} + A\mathrm{T}) I = \{\mathrm{C} + A[(v_a - p)(v_b - p) - p]\} I = \lambda I,$$

откуда получаем:

$$\lambda = \mathrm{C} + A[(v_a - p)(v_b - p) - p] = \mathrm{C} + kA,$$

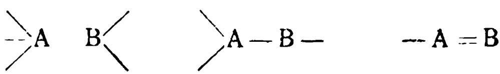
так называемую формулу Гейтлера.

Значение числа k занесено в таблицу.

$v_b =$	1		2			3				4				
$p =$	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
$v_a = 1$	1	-1												
$v_a = 2$	2	-1	4	0	-2									
$v_a = 3$	3	-1	6	1	-2	9	3	-1	-3					
$v_a = 4$	4	-1	8	2	-2	12	5	0	-3	16	8	2	-2	-4

Рассмотрение этой таблицы показывает, что устойчивость молекулы растет по мере насыщения валентностей. Например:

$$v_a = 3, \quad v_b = 2.$$



$$p = 0 \qquad\qquad p = 1 \qquad\qquad p = 2$$

$$\lambda = C + 6A \qquad \lambda_2 = C + A \qquad \lambda_3 = C - 2A.$$

Пример 2. Кольцо, состоящее из шести тождественных одновалентных атомов. За базис инвариантов выберем систему инвариантов, соответствующих схемам черт. 4.

Оператор энергии выразится через $W = C + A(t_{12} + \ldots + t_{61})$, если мы положим все обменные энергии между соседними атомами, равными A, и пренебрежем обменными энергиями между не соседними атомами. Найдем матрицу, при помощи которой в системе инвариантов I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 изобразится оператор циклической перестановки $z = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$. Имеем:

$$zI_1 = I_2, \quad zI_2 = I_1, \quad zI_3 = I_4, \quad zI_4 = I_5, \quad zI_5 = -I_3,$$

откуда

$$z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Корни матрицы $\| z \|$ будут:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = \omega, \quad \lambda_4 = \omega^2, \quad \lambda_5 = \omega^3,$$

где $\omega^3 = -1$.

Легко найти базис инвариантов, при котором оператор z изоразится диагональной матрицей. Имеем:

$$z(I_1+I_2)=(I_1+I_2),$$
$$z(I_1-I_2)=-(I_1-I_2),$$
$$z(I_3+\omega I_4+\omega^2 I_5)=-\omega^2(I_3+\omega I_4+\omega^2 I_5),$$
$$z(I_3-\omega^2 I_4-\omega I_5)=\omega(I_3-\omega^2 I_4-\omega I_5),$$
$$z(I_3-I_4+I_5)=-(I_3-I_4+I_5),$$

$$W(I_1+I_2)=C(I_1+I_2),$$
$$W(I_3+\omega I_4+\omega^2 I_5)=(C+2A)(I_3+\omega I_4+\omega^2 I_5),$$
$$W(I_3-\omega^2 I_4-\omega I_5)=(C+2A)(I_3-\omega^2 I_4-\omega I_5),$$
$$W(I_1-I_2)=C(I_1-I_2)+2A(I_3-I_4+I_5),$$
$$W(I_3-I_4+I_5)=6A(I_1-I_2)+(C+2A)(I_3-I_4+I_5).$$

Матрицы z и W при новом базисе будут иметь вид:

$$\|W\|=\begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C+2W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C+2W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 2W \\ 0 & 0 & 0 & 6W & C+2W \end{pmatrix},$$

$$\|z\|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Корнями секулярного уравнения матрицы W будут:

$$\lambda_1=C+(1-\sqrt{13})\,W,\quad \lambda_2=C,\quad \lambda_3=C+2W,$$
$$\lambda_4=C+2W,\quad \lambda_5=C+(1+\sqrt{13})\,W.$$

Легко видеть, что кольцо не будет термодинамически устойчивым, так как энергия трех двухатомных молекул будет лежать ниже, чем энергия кольца.

Дальнейшие примеры на применение теории спинвалентности читатель найдет в специальной литературе[1]).

---

[1]) H. Hellmann, «Zts. f. Phys.», Bd. 83, стр. 192, 1933,
Hidehiko Tamani, «Proc. of the Phys. Mathem. Soc. of Japan», V. 16, стр. 52, 1934.
M. Markow, «The Journ. of Chem. Phys.», V. 1, стр. 753, 1933.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

к книге Румера „Спинарный анализ“

Стр.	*Форма*	*Напечатано*	*Надо*
55	(5.5)	$T_{xy^2} =$	$T_{xy} =$
55	(5.5)	$T_{xz^2} =$	$T_{xz} =$
55	(5.5)	$T_{yy^2} =$	$T_{yy} =$
55	(5.5)	$T_{yz^2} =$	$T_{yz} =$

ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР

ПЕЧАТАЮТСЯ:

А. Энгель и М. Штенбек

ФИЗИКА И ТЕХНИКА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ГАЗАХ

т. II

Перевод с немецкого Д. Канаскова, Э. Рейхруделя, Г. Тягунова

под редакцией проф. Н. А. Капцова

А. Митчелл и М. Земанский

РЕЗОНАНСНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ВОЗБУЖДЕННЫЕ АТОМЫ

Перевод с английского В. и М. Фабрикант

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ:

Мотт и Месси

ТЕОРИЯ АТОМНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

Перевод с английского Т. А. Конторовой

под редакцией проф. Я. И. Френкеля

Стр. 360. Ц. 6 р., переплет 1 р.